Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Maths III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 8

Intégrales multiples

Exercice 1. (Simples calculs par tranches/piles) Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\displaystyle\iint_D x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où D est le carré $[0;1] \times [0;1]$,
2. $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{(x+y)^2}$, où D est le carré $[1;2] \times [3;4]$,
3. $\displaystyle\iint_D xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq 2y \leq x\}$,
4. $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\}$.

Exercice 2. Soient a et b deux réels strictement positifs. Pour tout $y > 0$, on pose $0^y = 0$. En calculant de deux manières différentes l'intégrale $\displaystyle\iint_D x^y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ où $D = [0;1] \times [a;b]$, déterminer la valeur de l'intégrale simple $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 3. (Le changement de variable en polaires) À l'aide d'un changement de variable en coordonnées polaires, déterminer les valeurs des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\iint_D (x+y)^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où D est le disque de centre 0 et de rayon 1,
2. $\displaystyle\iint_D y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où D est le demi-disque intersection du disque de centre 0 et de rayon 3, avec le demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$,
3. $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}$.

Exercice 4. (Calcul de l'intégrale de Gauss)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{-t^2}$. Pour $R > 0$, on note D_R le disque de centre 0 et de rayon R et C_R le carré centré en 0 et de côté $2R$.

1. Montrer que $\displaystyle\iint_{C_R} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 4 \left(\int_0^R f(t) \, \mathrm{d}t \right)^2$.
2. En utilisant un changement de variable en coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\iint_{D_R} f(\sqrt{x^2 + y^2}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.
   En déduire sa limite lorsque R tend vers $+\infty$.
3. Comparer les ensembles C_R, D_R et $D_{R\sqrt{2}}$.
4. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 5. (D'autres changements de variable)

1. Calculer $\iint_E \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où E est l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y - x \leq 1, 0 \leq 2x - y \leq 1\}$.
   (a) Représenter graphiquement l'ensemble P.
   (b) Calculer l'intégrale double $\iint_P (2x^2 - 3xy + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, à l'aide du changement de variable $u = y - x$, $v = 2x - y$.

Exercice 6. Calculer les deux intégrales suivantes avec la méthode des bâtons et la méthode des tranches :

$$I_1 = \iiint_V xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{et} \quad I_2 = \iiint_V x^2 z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

où $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z\}$.

Exercice 7. À l'aide d'un changement de variables en coordonnées cylindriques :

1. Déterminer la valeur de l'intégrale triple $\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où Ω est de domaine de $\mathbb{R}^3$ délimité par les surfaces d'équations $z = x^2 + y^2$ et $z = 4$.
2. Déterminer le volume de la partie D de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, x - 2y + 3z \geq 3 \text{ et } z \leq 3\}.$$

Exercice 8. À l'aide d'un changement de variables en coordonnées sphériques, calculer l'intégrale

$$\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

où B désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$ et a un réel strictement supérieur à 1.