

Feuille d'exercices n° 8
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y'(t) - y(t) = t$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 2. Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

$$1) \quad y'' + 2y' + y = xe^x \qquad 2) \quad y'' + y' - 2y = xe^x \qquad 3) \quad y'' + 2y' + 2y = (x+1)e^{-x}$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle $xy'' + (x-2)y' - 2y = 0$, d'inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I , sur tout intervalle ouvert I de \mathbb{R} . On pourra chercher une solution particulière polynomiale et une solution particulière de la forme $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, d'inconnue $y :]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle (E) $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = xe^x$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Résoudre (E) par trois méthodes :

1. à l'aide du changement de fonction inconnue $z = e^{-x}y$,
2. à l'aide du changement de fonction inconnue $u = y' - y$,
3. en cherchant des solutions particulières de l'équation différentielle sans second membre associée à (E) sous la forme $x \mapsto x^\alpha e^x$, où $\alpha \in \mathbb{Z}$ est une constante à choisir, puis en appliquant la méthode de variation des constantes.

Exercice 6. Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, d'inconnue $y :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, à l'aide du changement de variable défini par $t = \arcsin(x)$.

Exercice 7. Méthode de Lagrange (aussi appelée méthode d'abaissement de l'ordre)

Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $x^2(x+1)y'' - x(x^2 + 4x + 2)y' + (x^2 + 4x + 2)y = 0$, d'inconnue $y :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle suivante (E) : $x(x^2 - 1)y'' - 2(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$, d'inconnue $y :]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, sachant qu'il existe une solution polynomiale autre que la fonction nulle.

Exercice 9. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère deux solutions u et v de l'équation différentielle $(E) : y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

1. Montrer que le Wronskien de u et v (noté W) vérifie une équation différentielle et le calculer en fonction de sa valeur en un point a de I .
2. On suppose que u ne s'annule pas sur I . Exprimer W à l'aide d'une dérivée. Expliquer comment obtenir v à l'aide de W et u .
3. Application : On considère l'équation différentielle $x^2y'' - x(2+x)y' + (x+2)y = 0$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.
 - (a) Déterminer une solution polynomiale de (E) .
 - (b) À l'aide du Wronskien, déterminer une deuxième solution de (E) sur $I_1 =]-\infty; 0[$ et sur $I_2 =]0; +\infty[$.
 - (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable vérifiant $f + f'' \geq 0$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

Indication : faire apparaître une équation différentielle linéaire non homogène du second ordre dont f est solution.