Feuille d'exercices numéro 8

Applications linéaires, matrices, déterminants

Dans tous les exercices de cette feuille, le corps des scalaires est supposé être $\mathbf{R}$.

Exercice 8.1

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.
2. Dans $E = \mathbf{R}^n$, donner un exemple d'application satisfaisant les conditions de la question précédente.

Exercice 8.2

Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité de E. Un endomorphisme u de E est un **projecteur** si $u \circ u = u$.

1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que $\mathrm{Im}(u) = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
   Un endomorphisme u de E est appelé *involutif* si $u \circ u = i_E$.
2. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \mathrm{Im}(i_E + u) \oplus \mathrm{Im}(i_E - u)$.
   Soit $E = F \oplus G$. Etant donné $x \in E$, on peut donc l'écrire de façon unique sous la forme $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$; on pose alors $u(x) = f - g$.
3. Commençons par un exemple : dans cette question $E = \mathbf{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 1)$. Montrer que les hypothèses ci-dessus sont vérifiées. Décrire géométriquement l'application u, ainsi que l'application $p = \dfrac{1}{2}(i_E + u)$.
4. On revient au cas général. Montrer que u est un endomorphisme involutif, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$, et $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
5. Montrer que si p est un projecteur, $2p - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

Exercice 8.3

Soit p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q + q \circ p = 0$. Montrer qu'alors on a $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 8.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Montrer les inclusions
$$\mathrm{Im}(f \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(f) \text{ et } \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f \circ f).$$
2. Montrer les équivalences
$$\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f) \iff E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 8.5

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f, g deux applications linéaires de E vers F.

1. Montrer que $|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. Donner des exemples où on a égalité dans une des inégalités ci-dessus, et un exemple où les inégalités sont strictes.

Exercice 8.6

On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^∞. On définit ϕ et ψ, deux endomorphismes de E par les formules suivantes, pour $f \in E$

$$\phi(f) = f' \text{ et } \psi(f) = \left[x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right]$$

1. Exprimer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
2. Déterminer si ϕ et ψ sont injectives et/ou surjectives.

Exercice 8.7

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, en calculant le moins possible, que $\operatorname{Ker} u$ est une droite, et en donner une base a.
2. On note $b = (1, 1, 1)$ et $c = (1, 2, 0)$. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans cette base.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.
   (a) On note $v : E \to \mathbf{R}^3$ la restriction de u à E. Expliciter la matrice de v de (b, c) dans (a, b, c).
   (b) Montrer que cela a un sens de considérer $w : E \to E$ la restriction de u de E vers E, et écrire la matrice de w dans la base (b, c).

Exercice 8.8

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, lesquels ont un sens ? Calculez-les.

Exercice 8.9

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 8.10

Soit m un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(1 + I)(A - 2I)$.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A + I)$ et $C = \frac{1}{3}(A - 2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

Exercice 8.11

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3, f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

1. Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de $\underline{e}$ vers $\underline{f}$.
2. Soit $v \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?
3. Soit $w \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

Exercice 8.12

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.13

Calculer les déterminants de taille n suivants, en fonctions des paramètres réels $a, b, a_1, \ldots, a_n$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$