Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2011-2012

Math I - PMI

Feuille d'exercices n° 7

Limites et continuité

Exercice 1. Soit $f : \mathbf{R}_+^\star \to \mathbf{R}$.
En quels points $a \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ la fonction f peut-elle admettre une limite ?

Exercice 2. Étudier l'existence d'une limite de f au point a pour les données suivantes :

1. $a = 1$ et $f : \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;
2. $a = 0$ et $f : \mathbf{R}^\star \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x^2 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;
3. $a = +\infty$ et $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$;
4. $a = -\infty$ et $f :]-\infty, -5] \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 3 + \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$;
5. $a = 0$ et $f :]0, \frac{\pi}{3}[\longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sin(3x)}$;
6. $a = 0$ et $f :]0, \pi[\longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$;
7. $a = +\infty$ et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \sin(x)$.

Indication : on rappelle que $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 3. Soit $T > 0$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application T-périodique.
Montrer que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est constante.

Exercice 4. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On suppose

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \exists x_n \in \mathbf{R},\ \left(|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ \text{ et } \ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 \right).$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $x_0 \in]a, b[$ et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$.
On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset]a, b[$ contenant x_0 tel que $\forall x \in I,\ f(x) > 0$.

Exercice 6. Étudier la continuité des fonctions suivantes en tout point de leur domaine :

1. $f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$;
2. $f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto E(x) + E(2 - x)$;
3. $f_3 : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} x\, E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$;
4. $f_4 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbf{Q}^\star \\ x & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 7.

1. Soit $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe au plus une application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle que $g_{|\mathbf{Q}} = f$.
2. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $L \in \mathbf{R}_+$ tels que $(\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leq L|x-y|)$.
   Montrer que g est continue.
3. Soit $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ et $L \in \mathbf{R}_+$ tels que $(\forall (x,y) \in \mathbf{Q}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|)$.
   (a) Montrer que si (x_n) est une suite convergente, alors $(f(x_n))$ converge.
   (b) Montrer que si (x_n) et (y_n) sont deux suites convergeant vers une même limite réelle, alors $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ convergent vers une même limite.
   (c) Montrer qu'il existe $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $g_{|\mathbf{Q}} = f$ et $(\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ |g(x) - g(y)| \leq L|x-y|)$.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Montrer que si f est continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in [0,1]^2, (|x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

Indication : raisonner par contraposée et introduire des suites.

Exercice 9. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ tel que

(i) pour tout $x \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset E$;
(ii) pour tout $x \in E^c$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset E^c$.

1. Montrer que l'application

$$\chi_E : \mathbf{R} \longrightarrow \{0,1\},\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est continue.
2. En déduire que $E = \emptyset$ ou $E = \mathbf{R}$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue, possédant des limites en $+\infty$ et en $-\infty$, notées respectivement $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$ et $\ell' = \lim\limits_{-\infty} f$.

1. Montrer que f est bornée.
2. On suppose qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) > \max(\{\ell, \ell'\})$.
   (a) Montrer qu'il existe $R \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que

$$\sup_{\mathbf{R}} f = \sup_{[x_0-R, x_0+R]} f .$$

   (b) En déduire que f atteint sa borne supérieure.

Exercice 11. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continue.

1. Montrer que, si $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors f possède un point fixe.
2. Faire de même en supposant cette fois que $[0,1] \subset f([0,1])$.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) \ : \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)\, f(y)\,.$$

Soit f vérifiant $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
   On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.