Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 7

ARITHMÉTIQUE

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de a par b pour les valeurs de a et b suivantes :

1. $a = 2867$ et $b = 6$;
2. $a = 7813$ et $b = -12$;
3. $a = -959$ et $b = 6$;
4. $a = -1733$ et $b = -5$.

Exercice 2. Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}$.

1. Montrer que, si p divise q, alors $2^p - 1$ divise $2^q - 1$.
2. On note r le reste de la division euclidienne de q par p.
   Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^q - 1$ par $2^p - 1$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $7a - 4b^3 = 1$.
Indication : regarder l'équation modulo 7 et distinguer selon la classe de b modulo 7.

Exercice 4.

1. (a) Déterminer $k_0 \in \mathbf{N}^\star$ tel que $7^{k_0} \equiv 1\,[12]$.
   (b) Déterminer $k_1 \in \mathbf{N}^\star$ tel que $6^{k_1} \equiv 0\,[12]$.
   (c) Déterminer $(k_2, k_2') \in \mathbf{N}^2$ tels que $k_2 < k_2'$ et $3^{k_2} \equiv 3^{k_2'}[12]$.
   (d) Déterminer les restes de la division euclidienne par 12 des nombres suivants : 7^{30}, 6^{13}, 3^{17}, 31^{77}, $19^5 + 30^{144} + 15^{10}$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 122^{137} par 9.

Exercice 5. Déterminer le dernier chiffre dans l'écriture décimale de 3^{1111}.

Exercice 6.

1. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Montrer que sont équivalents $a \wedge b = 1$ et $(a + b) \wedge (ab) = 1$.
2. A-t-on, pour tout $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, $a \wedge b = (a + b) \wedge (ab)$?

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que la fraction $\dfrac{n+9}{n+2}$ soit irréductible.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que sont équivalentes les propositions suivantes :
   (i) n est le carré d'un entier ;
   (ii) n est le carré d'un rationnel.

   Indication : on veillera à distinguer le cas $n = 0$.
2. En déduire que, si p est un nombre premier, $\sqrt{p}$ n'est pas un rationnel.

Exercice 9.

1. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 6$ et $p \vee q = 21$.
2. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 5$ et $p \vee q = 0$.
3. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 35$ et $p \vee q = 210$.
4. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 7$ et $p\,q = 21$.
5. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \wedge q = 2$ et $p\,q = 8$.
6. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \vee q = 7$ et $p\,q = 20$.
7. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \vee q = 35$ et $p\,q = 175$.

Exercice 10.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 12.
2. Énumérer les diviseurs de 12.

Exercice 11.

1. Soit $N \in \mathbf{N}^\star$. Exprimer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de N le nombre de diviseurs positifs de N et leur somme.
2. Déterminer l'ensemble des entiers positifs possèdant 6 diviseurs positifs de somme 28.

Exercice 12. Montrer que, pour tout entier n, $n^5 - n$ est divisible par 15.

Exercice 13.

1. Résoudre en $n \in \mathbf{Z}$ le système $\begin{cases} n \equiv 1 & [20] \\ n \equiv 3 & [7] \end{cases}$.
2. Résoudre en $n \in \mathbf{Z}$ le système $\begin{cases} n \equiv 13 & [15] \\ n \equiv 6 & [10] \end{cases}$.
3. Résoudre en $n \in \mathbf{Z}$ le système $\begin{cases} n \equiv 11 & [15] \\ n \equiv 6 & [10] \end{cases}$.

Exercice 14. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$.

1. Montrer que si $a \wedge b = 1$, alors, pour tout $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, l'on a :
   $ap = bq$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $p = b\,k$ et $q = a\,k$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 15. Résoudre en $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ les équations suivantes

1. $18a + 5b = 11$;
2. $39a - 12b = 121$;
3. $14a - 21b = 49$.