

Feuille d'exercices n° 7

DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 2 ET EXTREMA

I. Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Est-elle de classe plus grande sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?
3. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur \mathbb{R}^2 et calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en tout point de \mathbb{R}^2 .
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f possède des dérivées partielles premières en tout point de \mathbb{R}^2 .
3. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?
4. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent à l'origine et les calculer.
5. Peut-on trouver un ouvert (de \mathbb{R}^2) contenant $(0, 0)$ sur lequel la fonction f de classe \mathcal{C}^2 ?

II. Extrema

Exercice 3. On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0, 0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Déterminer si $(0, 0)$ est un point de maximum local de f .

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f .
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x, y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$, où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 5. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)y + x^2 + 9y^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f et déterminer leur nature.
2. Sur \mathbb{R}^2 , la fonction f admet-elle des extrema globaux ? On pourra utiliser $f(0, t)$.
3. On définit les ensembles

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

- (a) Justifier que f possède sur D des extrema globaux.
- (b) Sur le cercle C , déterminer les valeurs minimales et maximales prises par f .
- (c) En déduire les valeurs minimales et maximales prises par f sur le disque D .

Exercice 6. Déterminer les bornes de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Exercice 7. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2mxy + y^4 - 2x^2y^2$.

1. Vérifier que $O = (0, 0, 0)$ est un point critique de f .
2. Étudier, suivant les valeurs du réel m , si O est un extremum local de f .

Exercice 8. Soit ABC un triangle. Déterminer le point M qui minimise la distance $AM^2 + BM^2 + CM^2$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - y^2 - 1$. Étudier les extrema relatifs de f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x-y} + xy^2$, puis S la surface d'équation $z = f(x, y)$. Déterminer une équation du plan tangent P à S au point $(1, 1, 2)$, puis la position relative de S et de P au voisinage de $(1, 1, 2)$.