Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Algèbre III - PMI

Feuille d'exercices n° 7

TRIGONALISATION DES ENDOMORPHISMES/MATRICES

Dans chacun des exercices suivants, les matrices sont considérées comme des matrices à coefficients réels. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera χ_M le polynôme caractéristique de M et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$, on notera $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$. Lorsque l'on demande de trigonaliser une matrice, il faut fournir une forme triangulaire, une matrice de passage associée, et la relation qui lie toutes ces matrices.
Lorsque cela est possible on cherchera à obtenir une matrice triangulaire supérieure de la forme $D + N$ avec D diagonale, N triangulaire supérieure stricte telles que $DN = ND$.

Le cas confortable : quand $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E - 1$

Exercice 1. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On donne $\chi_A = (X-1)^2$.

Exercice 2. Trigonaliser $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. On donne $\chi_B = (X-5)(X-1)^2$ ainsi que $E_5(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 3. Trigonaliser la matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. On donne $\chi_C = (X-1)^3$ ainsi que l'espace propre $E_1(C)$ associé à 1 qui est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

Des situations moins confortables : lorsque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) \le \dim(E) - 2$.

Exercice 4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ dont on donne le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-1)^3$ et la dimension de l'espace propre associé à 1 : $\dim(E_1(A)) = 1$.

1. Posons $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = (A - I_3)X_3$ et $X_1 = (A - I_3)X_2$. Calculer explicitement $(A - I_3)X_1$. En déduire que la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Trigonaliser A.

Exercice 5. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 0 \\ -10 & 9 & 5 & -5 \\ -7 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer que $\chi_u = (X-2)^2(X+2)^2$. On donne $E_2(u) = \mathrm{Vect}\{(-1,-1,3,2)\}$, $E_{-2}(u) = \mathrm{Vect}\{(0,-1,2,1)\}$ et les matrices suivantes :

$$(A - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 24 & 0 & 8 \\ 32 & -32 & 0 & 0 \\ 24 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } (A + 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 16 & -8 & -8 & 8 \\ 16 & -8 & -8 & 8 \\ -48 & 40 & 40 & -40 \\ -32 & 16 & 16 & -16 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F_2 \oplus F_{-2}$ où $F_2 = \mathrm{Ker}((u - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2)$ et $F_{-2} = \mathrm{Ker}((u + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})^2)$.
2. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F_2 et $\mathcal{B}_2$ une base de F_{-2}. Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$?
3. Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure de la forme $D + N$ avec D diagonale, N triangulaire supérieure stricte et $DN = ND$.

Exercice 6. Le but de l'exercice est de trigonaliser la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}_c = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans $\mathcal{B}_c$ est M. On donne le polynôme caractéristique de f, $\chi_f = (X-1)^4$, et une base de $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ à savoir $((3,1,0,1),(0,0,1,0))$ que l'on notera (u_1, u_2).

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, e_1, e_2)$.
2. En s'aidant de l'exercice 1, construire une base de $\mathbb{R}^4$ de la forme (u_1, u_2, u_3, u_4) où u_3 et u_4 sont des combinaisons linéaires intelligemment choisies de e_1 et e_2 dans laquelle la matrice de f est triangulaire.
3. Trigonaliser M.