

Feuille d'exercices n° 7

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

Exercice 1. On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $F(x)$ peut s'écrire comme une intégrale dont les bornes ne dépendent pas de x , pour $x > 0$.
2. Étudier la continuité de F .
3. Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et exprimer sa dérivée.
4. Retrouver les résultats des deux questions précédentes à l'aide des théorèmes pour les intégrales à paramètres à bornes variables.

Exercice 2. Soit f une application définie sur $[0, 1]$, à valeurs strictement positives, et continue.

Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 f^\alpha(t) dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ , et calculer $F'(0)$.
2. En écrivant un développement limité de F à l'ordre 1 en 0, en déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^1 f^\alpha(t) dt \right)^{1/\alpha}.$$

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$.

1. Montrer que f est définie, continue sur \mathbb{R}^{+*} . Étudier les variations de f .
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser (en le démontrant) l'encadrement : pour tout $t \in [0; \pi/2]$, $1 - \frac{1}{2}t^2 \leq \cos(t) \leq 1$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 f'(xt) dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et donner l'expression de ses dérivées successives.
2. Soit $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.
 - (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, exprimer $h(x)$ en fonction de $g(x)$.
 - (b) En déduire que h se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f .

Exercice 5. Soit F définie par $F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

1. Étudier l'ensemble de définition de la fonction F , que l'on notera \mathcal{D}_F .
2. Montrer que la fonction F est continue sur \mathcal{D}_F .
3. Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_F et en déduire une expression explicite de F .

Exercice 6. Soit F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$.

1. Montrer que la fonction F est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et que $F'(x) = 2xF(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression explicite de F sur \mathbb{R} .

Exercice 7. On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et vérifie $F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$ pour tout x réel puis que $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}$.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 8. Pour x un réel positif, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

Indication : on pourra étudier l'existence de la dérivée de l'application $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

Exercice 9. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

- (b) En déduire que Γ est C^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer que Γ est convexe.

Exercice 10. Pour tout $x \in [-1; 1]$, on pose $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $[-1; 1]$.
2. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}} dt$.

Exercice 11. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on note $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x \cos t dt$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Étudier la continuité de f sur $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe $c \in [0; +\infty[$ tel que $f(c) = \frac{3}{4}$.