Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 7

DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR OU ÉGAL À 2 ET EXTREMA

I. Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Est-elle de classe plus grande sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
3. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0\ ; \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent à l'origine et les calculer.
5. Peut-on trouver un ouvert (de $\mathbb{R}^2$) contenant $(0,0)$ sur lequel la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$. Justifier l'existence et déterminer le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(0,0)$.

II. Extrema

Exercice 4. On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x^2 + 2$.

1. Vérifier que si D est une droite passant par $(0,0)$, la restriction de f à D possède un maximum local à l'origine.
2. Déterminer si $(0,0)$ est un point de maximum local de f.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2+2y^2+x^2y^2-x^4-y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extrema locaux de f.
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x,y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$, où $r^2 = x^2+y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.
3. Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.
4. Y a t-il un minimum global ?

Exercice 6. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)y + x^2 + 9y^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f et déterminer leur nature.
2. Sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f admet-elle des extrema globaux ? On pourra utiliser $f(0,t)$.
3. On définit les ensembles

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\} \text{ et } C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\right\}.$$

   (a) Justifier que f possède sur D des extrema globaux.
   (b) Sur le cercle C, déterminer les valeurs minimales et maximales prises par f.
   (c) En déduire les valeurs minimales et maximales prises par f sur le disque D.

Exercice 7. Déterminer les bornes de la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice 8. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2mxy + y^4 - 2x^2y^2$.

1. Vérifier que $O(0,0,0)$ est un point critique de f.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel m, si O est un extremum local de f.

Exercice 9. Soit ABC un triangle. Déterminer le point M qui minimise la distance $AM^2 + BM^2 + CM^2$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - y^2 - 1$. Étudier les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{x-y} + xy^2$, puis S la surface d'équation $z = f(x,y)$. Déterminer une équation du plan tangent P à S au point $(1,1,2)$, puis la position relative de S et de P au voisinage de $(1,1,2)$.