Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices d'analyse n° 7

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$(\mathbf{E}) \qquad ay'' + by' + cy = f.$$

Etape 1 :

La première étape consiste à chercher les solutions générales de l'équation homogène associée :

$$(\mathbf{H}) \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

Pour cela, on associe à (**H**) l'équation du second degré suivante, appelée équation caractéristique de (**H**) et notée (**EC**) :

$$(\mathbf{EC}) \qquad ar^2 + br + c = 0.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. L'ensemble des solutions générales de (**H**) est donné en fonction du signe de Δ par le tableau suivant.

Discriminant	Racines de (**EC**)	Ensemble des solutions de (**H**)
$\Delta > 0$	Deux racines simples réelles $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y_H(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x},\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$
$\Delta = 0$	Une racine double réelle $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$	$y_H(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx},\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$
$\Delta < 0$	Deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$	$y_H(x) = e^{\alpha x}\left[\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right],\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Etape 2 :

On cherche ensuite une solution particulière de (**E**) en utilisant le tableau ci-dessous. Dans ce tableau, $P(x)$ est un polynôme, ω, α, β et k sont des constantes données par le second membre $f(x)$. $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ à déterminer, et A et B sont des constantes réelles à déterminer.

Une fois la forme de y_p identifiée, on calcule y_p' et y_p'' puis on injecte dans (**E**) afin de calculer les paramètres définissant y_p.

Second membre $f(x)$	Solution particulière $y_p(x)$
$f(x) = k = \text{cste}$	$y_p(x) = A = \text{cste}$
$f(x) = P(x)$	$y_p(x) = Q(x)$ si $c \neq 0$ $y_p(x) = xQ(x)$ si $c = 0$ et $b \neq 0$ $y_p(x) = x^2Q(x)$ si $c = b = 0$
$f(x) = P(x)e^{kx}$	$y_p(x) = Q(x)e^{kx}$ si k pas racine de $(\mathbf{EC})$: $k \neq r_1$, $k \neq r_2$ $y_p(x) = xQ(x)e^{kx}$ si k racine simple de $(\mathbf{EC})$: $r_1 \neq r_2$, $k = r_1$ ou $k = r_2$ $y_p(x) = x^2Q(x)e^{kx}$ si k racine double de $(\mathbf{EC})$: $k = r = r_1 = r_2$
$f(x) = e^{kx}\left[\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\right]$	$y_p(x) = e^{kx}\left[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right]$ si $k + i\omega$ pas racine de $(\mathbf{EC})$ $y_p(x) = xe^{kx}\left[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right]$ si $k + i\omega$ racine de $(\mathbf{EC})$

Si le second membre s'écrit $f(x) = f_1(x) + ... + f_n(x)$ où chaque fonction $f_k(x)$ prend l'une des formes de second membre données par le tableau ci-dessus, on cherche une solution particulière de $(\mathbf{E})$ en utilisant le principe de superposition. Pour cela, on cherche une solution particulière y_{p_k} de l'équation

$$(\mathbf{E}_k) \qquad ay'' + by' + cy = f_k.$$

Une solution particulière y_p de $(\mathbf{E})$ est alors donnée par $y_p(x) = y_{p_1}(x) + ... + y_{p_n}(x)$.

Etape 3 :

Les solutions générales de $(\mathbf{E})$ sont données par $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. S'il y a des conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$, on calcule les constantes λ et μ en injectant les conditions initiales dans la solution générale obtenue. On obtient alors une unique solution.

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + y = 0$ 2) $y'' - 3y' + 2y = 0$ 3) $y'' + 2y' + 2y = 0$ 4) $y'' + 2y' + y = e^x$
5) $y'' + y' - 2y = e^x$ 6) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ 7) $y'' + y = 2\cos^2 x$ 8) $y'' + y = \text{sh}x$

Exercice 2. Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts. Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 3. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. Soit ω un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \qquad y''(t) + \omega^2 y(-t) = \cos(\omega t).$$

1. Montrer que la résolution de $(\mathbf{E})$ peut se ramener à la résolution de deux équations différentielles ordinaires du second ordre ; pour cela on fera intervenir les parties paire et impaire de y.
2. Déterminer la solution générale de $(\mathbf{E})$. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions ?