Feuille d'exercices n° 6

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1.

1. Calculer le module et un argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.
2. Écrire sous forme trigonométrique $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 2. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$ puis l'on définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)^n$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$ une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 4.

1. Soit a et b deux nombres complexes.
   (a) Montrer que $\mathrm{Re}(\bar{a}b) = \mathrm{Re}\left(\bar{b}a\right)$.
   (b) Exprimer $\mathrm{Re}(\bar{a}b)$ à l'aide de formes trigonométriques de a et b, puis à l'aide des formes algébriques de a et b.
   (c) Montrer que $|\mathrm{Re}(\bar{a}b)| \leq |a||b|$.
   (d) Déterminer le cas d'égalité dans l'inégalité précédente et l'exprimer à l'aide de formes trigonométriques de a et b.
   (e) Montrer que
   $$|a+b|^2 = |a|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}b) + |b|^2 .$$
   (f) Démontrer l'identité du parallélogramme
   $$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left(|a|^2+|b|^2\right) .$$
2. Montrer que, pour tout $(a,b,z) \in \mathbf{C}^3$, on a :
$$|z-a|^2 \leq |z-b|^2 \quad \text{si et seulement si} \quad \mathrm{Re}\left(\overline{\left(z-\frac{a+b}{2}\right)}\,(b-a)\right) \leq 0 .$$

Exercice 5. Soit $c \in \mathbf{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a : $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On note $D = \{\ z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\ \}$ et $C = \{\ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\ \}$. Montrer que l'application
$$f : D \longrightarrow D,\ z \longmapsto \frac{z + c}{1 + \bar{c}z}$$
est une bijection telle que $f(C) = C$.

Exercice 6.

1. Pour tout $z \in \mathbf{C}^\star$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tout $(c, d) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant
$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & - & by & = & c \\ bx & + & ay & = & d \end{array} \right. .$$

Exercice 7. *Réduction de* $a \cos x + b \sin x$.

1. Soit a et b deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $\theta \in \mathbf{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbf{R},\ a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta).$$
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 8.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Indication : utiliser la formule du binôme de Newton.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ impair, exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ pair. Exprimer, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\cos(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, et faire de même en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 9. Soit $\theta \in \mathbf{R}$.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.
2. Étudier la limite des suites $\displaystyle\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $\displaystyle\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

Exercice 10. Récrire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'expression $(\cos 5x)(\sin 3x)$ comme combinaison linéaire de cosinus et de sinus.

Exercice 11. Déterminer algébriquement les racines carrées respectives de $7 + 24i$ et $9 + 40i$.

Exercice 12.

1. Résoudre algébriquement en $z \in \mathbf{C}$ l'équation $z^2 = (1+i)$.
2. En déduire des expressions de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice 13. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$;
2. $z^2 + 3z + 3 = 0$;
3. $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

Exercice 14. On cherche à résoudre en $z \in \mathbf{C}$ l'équation

$$z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i \;=\; 0 \;.$$

1. Déterminer une racine réelle z_0 de l'équation.
2. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, factoriser $z - z_0$ en $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i$.
3. Résoudre l'équation en $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 15. Résoudre en $z \in \mathbf{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 = -8i$;
2. $z^5 - z = 0$;
3. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$;
4. $z^2\bar{z}^7 = 1$;
5. $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$;
6. $z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.
2. Calculer la somme des racines n-ièmes de l'unité.
3. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 17. Décrire les ensembles suivants :

1. $\left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; z^2 + 2z - 3 \in \mathbf{R} \right\}$;
2. $\left\{ z \in \mathbf{C} \setminus \{-3\} \;\middle|\; \left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2 \right\}$;
3. $\left\{ z \in \mathbf{C}^\star \;\middle|\; \left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2 \right\}$.