Feuille d'exercices n° 6

Fonctions de plusieurs variables (suite)

1 Fonctions de plusieurs variables réelles : continuité

Exercice 1. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y & si \quad x < y \\ y & si \quad x \geq y \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(1/(xy)) & si \quad xy \neq 0 \\ 0 & si \quad xy = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 & si \quad x^2 < y \\ y^2 & si \quad x^2 \geq y \end{cases}$$

Exercice 3. Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
2. $g(x,y) = \sin(\frac{xy^2}{x^2+y^2})$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0,0)$.

Exercice 4. Soit $k \in \mathbb{R}$;, f une fonction de deux variables, définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que l'ensemble $\{(x,y) \in \mathcal{D} \text{ t.q. } f(x,y) = k\}$ est la *ligne de niveau* k de la fonction f dans $\mathcal{D}$.
Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ et ensuite les lignes de niveaux $k \in \mathbb{R}$ de la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et les représenter graphiquement. Même question avec $f(x,y) = x^2+y^2$ et $f(x,y) = y/x$.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes tracer les lignes de niveau indiquées :

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}, \qquad k = 0, -1; \qquad f(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}, \qquad k = 1,2.$$
$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{8-x^2y^2}, \qquad k = 2; \qquad f(x,y) = x-y-|x-y|, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.

Exercice 6. Une fonction continue $f\colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ est dite homogène de dégré $d \in \mathbb{R}$ si $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_*$ et $\forall\, \lambda > 0$ on a $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$.

1. Donner quelques exemples de fonctions homogènes.
2. Pour quelles valeurs de d une fonction homogène de degré d est-elle bornée ?
3. Pour quelles valeurs de d est-elle prolongeable avec continuité à l'origine ?

2 Fonctions de plusieurs variables réelles : dérivablité

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. L'application est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$ mais n'y est pas différentiable.