Feuille d'exercices n° 6

Topologie - Fonctions continues de plusieurs variables

1 Topologie (suite)

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite convergente de E. Montrer que l'ensemble des x_n est borné.

Exercice 2. Dans un espace vectoriel normé E, montrer que pour $x, y \in E$,

$$|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x - y\|.$$

En déduire que la norme est une application continue de E vers $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soient K et F deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque.

1. On suppose K compact et F fermé dans $\mathbb{R}^n$. On définit $d(K,F) = \inf\{\|k - f\|;\ (k,f) \in K \times F\}$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que $\|a - b\| = d(K,F)$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, en considérant l'hyperbole d'équation $xy = 1$ et l'axe des abscisses, montrer que le résultat précédent est en général faux si K est supposé fermé non compact.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 5. D'après le cours, les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées. On va montrer ici que ceci est faux en dimension non-finie. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\|\ \| : E \to \mathbb{R}_+$ défini ainsi : pour $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in E$, on pose $\|P\| = \sum_0^d |a_j|$.

1. Montrer que $\|\ \|$ est une norme sur E.
2. Soit (P_n) une suite de E convergente vers $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$. Notons, pour tout n, $P_n = a_{n,0} + a_{n,1}X + \cdots + a_{n,d_n}X^{d_n}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n,k})_n$ converge vers a_k dans $\mathbb{R}$.
3. Notons $S = \{P \in E \mid \|P\| = 1\}$. Montrer que la suite (X^n) est une suite de S et n'admet pas de sous-suite convergente (dans S). Conclure.

2 Fonctions de plusieurs variables réelles : limite et continuité

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2 + y^2}$. Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$ donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 8. Pour une fonction de deux variables on considère trois types de limites :

$$(A) \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y); \quad (B) \lim_{x\to a} (\lim_{y\to b} f(x,y)); \quad (C) \lim_{y\to b} (\lim_{x\to a} f(x,y)).$$

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x,y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x,y) = \frac{\sin y}{x}.$$

Démontrer qu'en $(0,0)$:

– deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième n'existe,

– une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres n'existent,

– (B) et (C) peuvent exister sans être égales,

– si (A) et (B) existent alors elles sont égales.

Exercice 9. Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 10. Calculer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes pour $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{|xy|}}{|x| + |y|}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^{1/3} y^2}{x^2 + y^2 + |x - y|},$$

$$f(x,y) = \frac{\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{y \ln(y - x^2)}, \qquad f(x,y) = x^y$$

Utilisation des coordonnées polaires

Rappel.

Soit $g \colon \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout θ, $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho,\theta) = \ell$.

Supposons *la limite uniforme en* θ :

$$\text{il existe } \; G \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ telle que } \quad \begin{cases} |g(\rho,\theta) - \ell| \leq G(\rho), \quad \forall\, \rho > 0, \; \forall \theta \\ \lim_{\rho\to 0^+} G(\rho) = 0. \end{cases}$$

Sous ces conditions, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est telle que $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = g(\rho,\theta)$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$.

Exercice 11. Pour chacune des fonctions $g : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ suivantes, calculer $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho, \theta)$. On précisera si :

1. La limite est indépendante de θ.
2. La limite est uniforme pour $\theta \in [0, 2\pi[$

$$g(\rho,\theta) = \frac{\rho}{\sin\theta + 3}, \qquad g(\rho,\theta) = \begin{cases} \rho\ln(\rho\sin(\theta)), & \text{si } \theta \in]0,\pi[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déduire de ce qui précède la limite pour $(x, y) \to (0, 0)$ de la fonction $f(x, y)$ telle que $f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = g(\rho, \theta)$.

Exercice 12. Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes, à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

$$f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

Exercice 13. En utilisant les coordonnées polaires, calculer les limites pour $(x, y) \to \infty$ des fonctions suivantes

$$f(x,y) = \frac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}, \qquad f(x,y) = \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2},$$

$$f(x,y) = (1+|x|+|y|)\sin(y^2), \qquad f(x,y) = ye^x + \ln|y|.$$

Exercice 14. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux applications continues.

1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
2. On suppose $m = 1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
3. On suppose $m = 1$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 15. Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, f(x+y) = f(x)+f(y)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall q \in \mathbb{Q}, f(qx) = qf(x)$.
4. En déduire que f est une application linéaire.

Exercice 16. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}}.$$

1. Soit D une droite quelconque passante par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en $(0, 0)$.
2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0, 0)$?

Exercice 17. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 18. Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f(x, y) = x^2 y$ si $x < y$ et y si $x \geq y$
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(1/(xy))$ si $xy \neq 0$ et 0 si $xy = 0$
3. $f(x, y) = x^4$ si $x^2 < y$ et y^2 si $x^2 \geq y$
4. $f(x, y) = xy$ si $x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}$ et 0 si $x^2 + y^2 \notin \mathbb{Q}$

Exercice 19. Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
2. $g(x, y) = \sin(\frac{xy^2}{x^2+y^2})$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0, 0)$.

Exercice 20. Soit $k \in \mathbb{R}$;, f une fonction de deux variables, définie sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On rappelle que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathcal{D}$ t.q. $f(x, y) = k\}$ est la *ligne de niveau* k de la fonction f dans $\mathcal{D}$.
Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ et ensuite les lignes de niveaux 0, 1, -1, 2 et 3 de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et les représenter graphiquement. Même question avec $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $f(x, y) = y/x$.

Exercice 21. Pour chacune des fonctions suivantes tracer les lignes de niveau indiquées :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}, \qquad k = 0, -1; \qquad f(x, y) = \frac{xy - x + y}{xy}, \qquad k = 1, 2.$$
$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2}, \qquad k = 2; \qquad f(x, y) = x - y - |x - y|, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Pour la dernière question, traiter séparément les cas $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.

Exercice 22. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner une définition pour les situations suivantes :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty.$$

Étudier ensuite les limites pour $(x, y) \to (0, 0)$ et $\|(x, y)\| \to \infty$ de la fonction

$$f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + x + y + 1)^\alpha}{x^2 + y^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23. Une fonction continue $f \colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ est dite homogène de dégré $d \in \mathbb{R}$ si $\forall\, x \neq 0$ et $\forall\, \lambda > 0$ on a $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$.

1. Donner quelques exemples de fonctions homogènes.
2. Pour quelles valeurs de d une fonction homogène de degré d est-elle bornée ?
3. Pour quelles valeurs de d est-elle prolongeable avec continuité à l'origine ?

Exercice 24. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) = +\infty$. Démontrer que les lignes de niveau de f sont compactes.

Exercice 25. Établir si les fonctions suivantes sont bornées dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = (x + 2y^2)\exp(-|xy|), \quad f(x, y) = \exp(\cos(1 + xy)), \quad f(x, y) = (x^4 + y^2)\exp(-x^2 - y^4).$$