

Feuille d'exercices n° 6

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

Exercice 1. On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $F(x)$ peut s'écrire comme une intégrale dont les bornes ne dépendent pas de x , pour $x > 0$.
2. Étudier la continuité de F .
3. Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
4. Retrouver les résultats des deux questions précédentes à l'aide des théorèmes pour les intégrales à paramètre à bornes variables.

Exercice 2. Soit f une application définie sur $[0; 1]$, à valeurs strictement positives, et continue.

Pour $\alpha \geq 0$, on pose $F(\alpha) = \int_0^1 (f(t))^\alpha dt$.

1. Justifier que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ , et calculer $F'(0)$.
2. En écrivant un développement limité de F à l'ordre 1 en 0, en déduire la valeur de

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_0^1 (f(t))^\alpha dt \right)^{1/\alpha}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 f'(xt) dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et donner l'expression de ses dérivées successives.
2. Soit $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.
 - (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, exprimer $h(x)$ en fonction de $g(x)$.
 - (b) En déduire que h se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et exprimer ses dérivées successives en 0 en fonction de celles de f .

Exercice 4. Soit F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t^2+2at}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
2. Montrer que la fonction F est définie et continue sur \mathbb{R} .
3. Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que $F'(x) = 2xF(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une expression explicite de F sur \mathbb{R} .

Exercice 5. On pose, pour $a > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt$.

1. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que l'on a $F'(x) = \frac{-x}{2a} F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que $F(x) = F(0)e^{-x^2/4a}$ pour tout x réel puis que $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-x^2/4a}$.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 6.

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$.
2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

- (a) Montrer que la fonction F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ et expliciter $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
- (b) En déduire une expression explicite de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7. Soit F définie par $F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction F est égal à $] -1; +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant : pour tout $t \in]0; 1[$, $\left| \frac{t-1}{\ln t} \right| \leq M$.
3. En déduire que F admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et la déterminer.

- Montrer que la fonction F est continue sur $] -1; +\infty[$.
- Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1; +\infty[$ et calculer expliciter $F'(x)$ pour $x > -1$.
- En déduire une expression explicite de F .

Exercice de cours : la fonction Γ d'Euler

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- Quel est le domaine de définition de Γ ?
- (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Démontrer que g_k est intégrable sur $]0; +\infty[$.

- (b) En déduire que Γ est \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
- Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur $\Gamma(n+1)$ pour n entier naturel et un équivalent de Γ en 0.
- Montrer que la fonction Γ est convexe.

Pour s'entraîner :

Exercice 9. Soit $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$.

- Montrer que f est définie, continue sur \mathbb{R}^{+*} . Étudier les variations de f .
- Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
- (*) Démontrer les équivalents suivants :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Indication : pour l'équivalent lorsque $x \rightarrow 0^+$, on pourra (démontrer et) utiliser

l'encadrement : pour tout $t \in [0; \pi/2]$, $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1$.

Exercice 10. Pour tout $x \in [-1; 1]$, on pose $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}} dt$.

- Montrer que F est continue sur $[-1; 1]$.
- En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{(t+2)^{x-1}}{(t+1)^{x+1}} dt$.

Exercice 11. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on note $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x \cos t dt$.

- Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
- Étudier la continuité de f sur $[0; +\infty[$.
- Montrer qu'il existe $c \in [0; +\infty[$ tel que $f(c) = \frac{3}{4}$.