Feuille d'exercices n° 6
Polynômes annulateurs et polynôme minimal

Exercice 1. Soit $T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'endomorphisme défini par $T(P) = P(1 - X)$. Vérifier que $T^2 = \mathrm{Id}$, puis déterminer les valeurs propres de T.

Exercice 2. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. Montrer que u est linéaire. Déterminer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 3. Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes, où $a \neq b$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E vérifiant $f^4 = f^3 + 2f^2$. On suppose de plus que -1 et 2 sont valeurs propres de f. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ et C_P la matrice compagnon de P.

1. On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $(e_1, C_Pe_1, \ldots, C_P^{n-1}e_1)$ est libre.
2. En déduire que le polynôme minimal de C_P est de degré supérieur ou égal à n.
3. Déterminer le polynôme minimal de C_P.

Exercice 6. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E.

Exercice 7. Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 8. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A^2 l'est.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $M^3 = M$.

Exercice 10. L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$(\star) \qquad M^3 + M = 0.$$

Soit M non nulle satisfaisant $(\star)$. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id})$.
2. Déterminer le polynôme minimal de u.
3. Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3$ n'appartient pas au noyau de u alors $(x, u(x))$ est libre.
4. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(u) = 1$. En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Conclure.

Exercice 11. Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie où l'on suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que 0 ne peut pas être une valeur propre de u.
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P est premier avec le polynôme minimal m_u de u si et seulement si l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.

Exercice 13. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $E = F \oplus G$. Notons m_F et m_G les polynômes minimaux respectifs des restrictions de u à F et G. Montrer que le polynôme minimal de u est égal à $\mathrm{ppcm}(m_F, m_G)$.

Pour s'entraîner : (si le cas général $n \in \mathbb{N}^*$ pose souci, on pourra commencer par traiter l'exercice dans le cas $n = 3$ par exemple pour visualiser les choses)

Exercice 14.

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer J^p pour tout p dans $\{1, \ldots, n\}$.

   (b) En déduire que J est diagonalisable.

   (c) Montrer que $I_n, J, \ldots, J^{n-1}$ sont linéairement indépendants.

   (d) Déterminer le polynôme minimal de J, puis calculer les valeurs propres de J.

   (e) Diagonaliser J en exhibant une matrice de passage.

2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Exprimer A comme polynôme en la matrice J.

   (b) Montrer que pour tout polynôme complexe Q, $Q(J)$ est diagonalisable et l'ensemble de ses valeurs propres est $\{Q(\lambda) \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } J\}$.

   (c) En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

   (d) Calculer le déterminant de A.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Soient $B, C \in \mathbb{K}[A]$. Montrer que $BC \in \mathbb{K}[A]$ et que $BC = CB$.
2. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $d = \deg \pi_A$. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{d-1})$ est libre, puis, à l'aide d'une division euclidienne, qu'elle engendre $\mathbb{K}[A]$. En déduire la dimension de $\mathbb{K}[A]$.

Pour aller plus loin :

Exercice 16.

1. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

   (b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que si A et B ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, alors elles sont semblables.

2. Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer leur rang, leur polynôme caractéristique et leur polynôme minimal. Sont-elles semblables ?

3. (difficile) Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, deux matrices ayant même polynôme caractéristique et même polynôme minimal sont-elles semblables ?

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un endomorphisme u de E est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

1. Soit u un endomorphisme cyclique. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice obtenue à la question précédente.

   (b) En déduire que pour tout polynôme unitaire $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, il existe un endomorphisme cyclique u de E dont le polynôme caractéristique est Q.
3. Soit u un endomorphisme cyclique. Montrer que le polynôme minimal de u est égal à son polynôme caractéristique.