Feuille d'exercices n° 6
GÉOMÉTRIE AFFINE

Exercice 1. Soit $R = (0, i, j, k)$ un repère d'un espace affine (de dimension 3). Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, -1, 2)$ et $(1, 1, 1)$ dans ce repère. On note R_1 le repère (A, i, j, k) et R_2 le repère $(B, -k, -i, j)$. Exprimer les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 en fonction de celles dans le repère R_1.

Exercice 2. Dans un plan euclidien muni d'un repère (O, i, j), on considère le triangle ABC limité par les trois droites d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces droites sont alignées.

Exercice 3. On considère la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$:

$$z' = (i - 1)z + 2 - i.$$

1. Déterminer son centre, son rapport et son angle.
2. On considère dans le plan complexe les points A d'affixe i, B d'affixe -1 et C d'affixe $-i$.
   (a) Déterminer les points A', B' et C', images respectives de A, B et C par la similitude s.
   (b) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{A'B'C'}$? de la longueur $A'C'$? de l'aire du triangle $A'B'C'$?

Exercice 4. Dans un plan affine euclidien, soit quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B' :

1. en utilisant des nombres complexes.
2. sans nombres complexes, en commençant par traiter le cas où $A = A'$ puis en s'y ramenant.

Exercice 5. On considère la transformation d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'expression analytique dans un repère orthonormé est :

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= z + 1 \\ z' &= x - 1. \end{cases}$$

La décrire géométriquement.

Exercice 6. 1. Dans $\overrightarrow{E}$ espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée (i, j, k), on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans la base donnée est :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Décrire géométriquement u.

2. Dans E espace affine euclidien, de direction $\overrightarrow{E}$, muni d'un repère orthonormé (O, i, j, k), on considère l'application f exprimée en coordonnées par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) + 1 \\ y' = \frac{1}{3}(2x - 2y + z) + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) + 3 \end{cases}$$

(a) On note $\overrightarrow{E_1}$ l'axe de la rotation u étudiée au 1. Déterminer l'ensemble :

$$\Delta = \{M \in E \mid \overrightarrow{Mf(M)} \in \overrightarrow{E_1}\}.$$

f a-t-elle des points fixes ?

(b) Écrire f comme composée $t \circ r$ où r est une rotation affine d'axe Δ et t est une translation de vecteur u parallèle à Δ.

Exercice 7. Soient $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ deux espaces vectoriels, $u : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire et $y_0 \in \overrightarrow{F}$. Montrer que l'ensemble (s'il n'est pas vide) des $x \in \overrightarrow{E}$ tels que $u(x) = y_0$ est un espace affine dont on donnera la direction.

Exercice 8. Soient $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to E$ une application affine.

1. Montrer que si f admet un point fixe A alors l'ensemble des points fixes de f est : $A + \ker(L_f - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de L_f.
3. Supposons que f soit une symétrie (i.e. $f^2 = \mathrm{Id}_E$) alors montrer que pour tout point $M \in E$, le milieu du segment $[M; s(M)]$ est un point fixe.
4. Représenter les différentes symétries lorsque $\dim(E) = 3$. On fera un dessin pour chaque valeur possible de $\dim\ker(L_f - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}})$

Exercice 9. Soit E un espace affine euclidien et soit f une application affine de E telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $M \in E$, la distance de M à $f(M)$ soit égale à c. Que dire de f ?

Exercice 10. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine réel et $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application affine telle que $f^3 = \mathrm{Id}$ et $f \neq \mathrm{Id}$.

1. Montrer que si $A \neq f(A)$, alors $A, f(A), f^2(A)$ sont non alignés.

2. En déduire que f est le produit de deux symétries.

Exercice 11. Soit $f : E \to E$ affine. On dit que f est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$.

1. Soient F un sous-espace affine de E et $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$ tels que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$. Soient s la symétrie par rapport à F suivant $\overrightarrow{G}$, et t une translation de vecteur $\vec{u}$.
   Montrer que $s \circ t = t \circ s \iff \vec{u} \in \overrightarrow{F}$.
2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s, t) tel que $f = s \circ t = t \circ s$ est unique.
3. Soit f affine quelconque. Montrer que f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.
4. En déduire que la composée d'une symétrie et d'une translation est une symétrie-translation.
5. Décomposer l'application f dont l'expression analytique dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :
$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

Exercice 12.

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ et $(B_1, B_2, \ldots B_n)$ deux familles de n points du plan dont on note respectivement G et H les isobarycentres.
   Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = n\overrightarrow{GH}$.
2. (a) Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).
   (b) Montrer que si les points A, B, C ne sont pas alignés, tout point du plan est barycentre de ces trois points.

Exercice 13. Soient A, B, C, D quatre points du plan affine $\mathcal{E}$. On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de AB, AC, AD, BC, CD, DE. On note aussi E, F, G, H les isobarycentres respectifs des points (B, C, D), (A, C, D), (A, B, D) et (A, B, C). Montrer que les droites (IM), (JN), (KL), (AE), (BF), (CG) et (DH) sont concourantes.
Indication : utiliser la propriété d'associativité des barycentres.

Exercice 14. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i). le barycentre G de toute famille finie $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k)\}$ de points pondérés de C tels que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, appartient à C,
   (ii). $\forall M, N \in C$, $[MN] = \{M + \lambda\overrightarrow{MN} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$.

Une partie vérifiant les conditions précédentes est dite convexe.

2. Soit C une partie convexe de $\mathcal{E}$. Soit $P \in C$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i). $\forall M, N \in C,\ P = \mathrm{Bar}((M, 1/2), (N, 1/2)) \Rightarrow M = P = N$,
   (ii). $\forall M, N \in C,\ \forall \lambda \in]0; 1[,\ P = \mathrm{Bar}((M, 1-\lambda), (N, \lambda)) \Rightarrow M = P = N$,
   (iii). Le complémentaire C_0 de $\{P\}$ dans C est convexe.

   Un tel point P de la partie convexe C, qui ne peut être isobarycentre de deux points distincts de C est appelé point extrémal de C.

Exercice 15.

1. Soit f une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même telle qu'il existe un entier naturel non nul n pour lequel f^n admet un point fixe A. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit f une isométrie du plan affine euclidien telle qu'il existe un entier naturel n pour lequel f^n est la rotation de centre A et d'angle $\theta \neq 0 \mod 2\pi$. Déterminer f.

Exercice 16. Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ dans lui-même commutant avec toutes les translations.

Exercice 17. Déterminer les déplacements et les réflexions de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ laissant globalement invariante une sphère donnée.

Exercice 18.

1. On se place dans le plan affine muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient D une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.
   (a) On note $H(x, y)$ la projection orthogonale de M_0 sur D. Déterminer les coordonnées de H.
   (b) En déduire la formule donnant la distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite D (en fonction de a, b, c, x_0 et y_0).
2. On se place désormais dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient P un plan affine d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.
   (a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale $H(x, y, z)$ du point M_0 sur P.
   (b) En déduire la distance du point M_0 au plan P.

Exercice 19.

1. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on considère les points $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ et $C(2, -1, 3)$. Déterminer les points D situés sur la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ tels que $ABCD$ est un tétraèdre de volume égal à 5.