

Feuille d'exercices n° 6

GÉOMÉTRIE AFFINE

Exercice 1. Soit $R = (0, i, j, k)$ un repère d'un espace affine (de dimension 3). Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, -1, 2)$ et $(1, 1, 1)$ dans ce repère. On note R_1 le repère (A, i, j, k) et R_2 le repère $(B, -k, -i, j)$. Exprimer les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 en fonction de celles dans le repère R_1 .

Exercice 2. Dans un plan euclidien muni d'un repère (O, i, j) , on considère le triangle ABC limité par les trois droites d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces droites sont alignées.

Exercice 3. On considère la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$:

$$z' = (i - 1)z + 2 - i.$$

1. Déterminer son centre, son rapport et son angle.
2. On considère dans le plan complexe les points A d'affixe i , B d'affixe -1 et C d'affixe $-i$.
 - (a) Déterminer les points A' , B' et C' , images respectives de A , B et C par la similitude s .
 - (b) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{A'B'C'}$? de la longueur $A'C'$? de l'aire du triangle $A'B'C'$?

Exercice 4. Dans le plan affine \mathbb{R}^2 , on fixe trois points O, A, B non alignés. À tout point M du plan distinct de O , A et B , on associe les points $P \in (OA)$ et $Q \in (OB)$ tels que $OPMQ$ est un parallélogramme. On suppose que les droites (AQ) et (BP) sont sécantes en M' . Montrer que les droites (MM') passent toutes par un certain point que l'on déterminera.

Exercice 5. On se place dans le plan \mathbb{R}^2 . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite D_λ d'équation

$$(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2.$$

Montrer que les droites D_λ sont toutes tangentes à un cercle dont on donnera le centre et le rayon. Indication : avec quelques valeurs particulières de λ , on trouvera le cercle puis on déterminera la distance entre le centre du cercle et D_λ .

Exercice 6. Soit (E, \vec{E}) un espace affine de dimension 3. Soit \mathcal{P} un plan de E et $A \in E$ un point n'appartenant pas à \mathcal{P} . Soit \mathcal{D} une droite non (faiblement) parallèle à \mathcal{P} et passant par A . Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{D} s'intersectent en un point.

Exercice 7. Soit (E, \vec{E}) un espace affine de dimension 3. Soit (u, v, w) une base de \vec{E} , A un point de E et \mathcal{D} la droite passant par A et dirigée par u .

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons M_λ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un unique plan passant par M_λ et contenant \mathcal{D} . On le notera \mathcal{P}_λ .
2. Montrer que lorsque λ décrit \mathbb{R} , \mathcal{P}_λ décrit tous les plans contenant \mathcal{D} sauf un. On le note \mathcal{P}_∞ . Déterminer la direction de \mathcal{P}_∞ en fonction de u, v, w .

Exercice 8. Soit (E, \vec{E}) un espace euclidien. Soient $A, B \in E$ deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que $(AM) \perp (BM)$. On pensera à utiliser le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 9. Soient \vec{E} et \vec{F} deux espaces vectoriels, $u : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ une application linéaire et $y_0 \in \vec{F}$. Montrer que l'ensemble (s'il n'est pas vide) des $x \in \vec{E}$ tels que $u(x) = y_0$ est un espace affine dont on donnera la direction.

Exercice 10. Soit (E, \vec{E}) un espace affine euclidien.

1. Soit \vec{H} un sous-espace vectoriel de \vec{E} . Montrer que \vec{H} est un hyperplan si et s. si il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $\vec{H} = \{x \in E \mid \langle x, v \rangle = 0\}$.
2. Soit H un sous-espace affine de E . Montrer que H est un hyperplan si et s. si il existe $O \in H$ et il existe $A \in E \setminus H$ tel que $H = \{M \in E \mid (OM) \perp (OA)\}$.

Exercice 11. Soit (E, \vec{E}) un espace affine euclidien. Soient A et B deux points de E . Montrer que l'ensemble des points M équidistants de A et B est l'hyperplan affine $H = I + (\text{Vect}\{\overrightarrow{AB}\})^\perp$ où I est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 12. Soit (P, \vec{P}) un plan affine. Une dilatation est une application $f : P \rightarrow P$ telle que pour toute droite Δ , il existe une droite Δ' parallèle à Δ telle que $f(\Delta) \subseteq \Delta'$.

1. Soient A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$. Montrer qu'il existe au plus une dilatation f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
2. Montrer qu'une dilatation est soit constante soit bijective.

Exercice 13.

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère (A_1, A_2, \dots, A_n) et (B_1, B_2, \dots, B_n) deux familles de n points du plan dont on note respectivement G et H les isobarycentres.

Montrer que $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i B_i} = n \overrightarrow{GH}$.

2. (a) Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB) .
 (b) Montrer que si les points A, B, C ne sont pas alignés, tout point du plan est barycentre de ces trois points.

Exercice 14. Soient A, B, C, D quatre points du plan affine \mathcal{E} . On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de AB, AC, AD, BC, CD, DE . On note aussi E, F, G, H les isobarycentres respectifs des points (B, C, D) , (A, C, D) , (A, B, D) et (A, B, C) . Montrer que les droites (IM) , (JN) , (KL) , (AE) , (BF) , (CG) et (DH) sont concourantes.

Indication : utiliser la propriété d'associativité des barycentres.

Exercice 15. Soit \mathcal{E} un espace affine réel.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i). le barycentre G de toute famille finie $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)\}$ de points pondérés de C tels que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, appartient à C ,

(ii). $\forall M, N \in C, [MN] = \{M + \lambda \overrightarrow{MN} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$.

Une partie vérifiant les conditions précédentes est dite convexe.

2. Soit C une partie convexe de \mathcal{E} . Soit $P \in C$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i). $\forall M, N \in C, P = \text{Bar}((M, 1/2), (N, 1/2)) \Rightarrow M = P = N$,

(ii). $\forall M, N \in C, \forall \lambda \in]0; 1[, P = \text{Bar}((M, 1 - \lambda), (N, \lambda)) \Rightarrow M = P = N$,

(iii). Le complémentaire C_0 de $\{P\}$ dans C est convexe.

Un tel point P de la partie convexe C , qui ne peut être isobarycentre de deux points distincts de C est appelé point extrémal de C .

Exercice 16.

1. On se place dans le plan affine muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient D une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.

(a) On note $H(x, y)$ la projection orthogonale de M_0 sur D . Déterminer les coordonnées de H .

(b) En déduire la formule donnant la distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite D (en fonction de a, b, c, x_0 et y_0).

2. On se place désormais dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient P un plan affine d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

(a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale $H(x, y, z)$ du point M_0 sur P .

(b) En déduire la distance du point M_0 au plan P .

Exercice 17.

1. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de \mathbb{R}^3 à coefficients entiers est un nombre entier.

2. On munit \mathbb{R}^3 d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ et $C(2, -1, 3)$. Déterminer les points D situés sur la droite passant par O et de vecteur directeur \vec{j} tels que $ABCD$ est un tétraèdre de volume égal à 5.