

Feuille d'exercices n° 6

SÉRIES ENTIÈRES

**Exercice 1. Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes (pour  $z \in \mathbb{C}$ ) :

1.  $\sum (-1)^n (n+3)! z^n$ ,
2.  $\sum n^n z^n$ ,
3.  $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ ,
4.  $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$ ,
5.  $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ ,
6.  $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) z^n$ .

**Exercice 2.**

1. Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|$ . Comparer les rayons de convergences, notés respectivement  $R_a$  et  $R_b$ , des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $c_n = n^2 \int_0^1 \arctan(x^n) dx$ . On donne l'inégalité :  $\forall x \in [0; 1], x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$ .
  - (a) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer un encadrement de  $c_n$ , par des termes non nuls.
  - (b) En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum c_n z^n$ .

**Exercice 3. Rayon de convergence**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1.  $\sum a_n z^{3n}$ ,
2.  $\sum a_n 3^n z^{2n}$ ,
3. On suppose désormais  $R > 0$ . Montrer que la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini.

**Exercice 4. Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1.  $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}$ ,
2.  $\sum \frac{(1+i)^n}{n 2^n} z^{3n}$ ,
3.  $\sum \frac{n!}{1.3 \dots (2n+1)} z^{2n+3}$ .
4.  $\sum (1+(-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$ .
5.  $\sum z^{n!}$ ,
6.  $\sum n^n z^{n^2}$ .

**Exercice 5. Vrai ou Faux** Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

(On donnera une démonstration si elles sont vraies ou un contre-exemple si elles sont fausses).

1. Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum (-1)^n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum (-1)^n a_n z^n$  ont le même domaine de convergence.

**Exercice 6. Série entière, calcul explicite**

Déterminer le rayon de convergence ainsi que le domaine de convergence des séries entières associées, et déterminer la valeur des sommes suivantes pour  $x$  dans l'intervalle ouvert de convergence :

1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ ,
2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^{2n}$ ,
3.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ,
4.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n 3^n}{n+1} x^n$ ,
5.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)!} x^n$ ,
6.  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$ ,
7.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

**Exercice 7. Séries entières et équation différentielle**

Déterminer les séries entières dont la fonction somme est solution de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2 - 1)f'(x) - (2x^2 + 1)f(x) = 0. \tag{1}$$

Préciser le rayon des séries entières obtenues.

**Exercice 8. Série entière et équation différentielle** On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad f''(x) - 4f(x) = 0. \quad (2)$$

On cherche  $f$  sous la forme de la somme d'une série entière :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , et vérifiant les conditions  $f(0) = 4$  et  $f'(0) = 0$ .

Montrer que la seule solution est donnée par  $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$ , et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

**Exercice 9. Attention au rayon !!**

Déterminer l'ensemble des fonctions développables en séries entières (au voisinage de 0) de l'équation différentielle

$$(E) : \quad x^2 y' + y = x.$$

**Exercice 10. Développements en série entière**

Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes et déterminer les rayons de convergence des séries entières obtenues :

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. $x \mapsto \frac{1}{x-5},$                   | 4. $x \mapsto \frac{1}{(2+x)^3},$      | 7. $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{x-1},$   |
| 2. $x \mapsto \frac{1}{1+9x^2},$                | 5. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^3}},$ | 8. (*) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x(\cos \alpha) + 1}$<br>pour $\alpha \in ]0, \pi[$ fixé, |
| 3. $x \mapsto \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right).$ | 6. $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+2)},$ | 9. (*) $x \mapsto \ln(1+x+x^2).$   |

*Indication : pour la question ??, on factorisera le dénominateur dans  $\mathbb{C}$ , et pour la question ??, on pourra remarquer que  $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ .*

**Exercice 11. Développements en série entière en un point différent de 0**

Développer en série entière les fonctions suivantes au point donné :

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| 1. $x \mapsto \ln(x)$ en 1 puis en 2, | 3. $x \mapsto e^x$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ , |
| 2. $x \mapsto \sin(x)$ en $\pi/4$ ,   | 4. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 2.           |

**Exercice 12. Applications des séries entières**

- On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  si  $x \neq 0$  et par  $f(0) = 1$ . Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (a) Montrer que la fonction sinus cardinal définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $\text{sinc}(0) = 1$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .  
(b) Établir l'égalité :

$$\int_0^\pi \text{sinc}(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

**Exercice 13. Série de Taylor**

Donner un exemple de fonction définie sur tout  $\mathbb{R}$  mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14. Série de Taylor**

Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !** On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$ .
- En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .
- En déduire que  $f$  n'est pas développable en série entière en 0.

**Pour aller plus loin :**

**Exercice 15.** Pour  $n \geq 1$ , et  $x \in \mathbb{R}$ , on note

$$f_n(x) = e^{-n} \cos(n^2 x) \quad \text{puis on pose} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série de fonctions qui définit  $f$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que sa somme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et en particulier que, pour tout  $k \geq 1$  :

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} n^{4k}.$$

En utilisant la formule de Stirling  $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , montrer que la série de Taylor de  $f$  en 0 a un rayon de convergence nul.

**Pour s'entraîner :**

**Exercice 16.** Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt$ .

1. Sans expliciter l'intégrale, justifier que  $F$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $F$  est développable en série entière sur  $] -1; 1[$ , et que son développement en série entière est :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n^2}.$$

3. Montrer que la série entière associée au développement de  $F$  ci-dessus converge uniformément sur  $[-1; 1]$ .
4. En déduire :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}.$$

**Exercice 17. Série entière et équation différentielle**

On cherche le développement en série entière de  $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , par la "méthode de l'équation différentielle".

1. Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 notée  $(E)$  que l'on précisera.

2. Déterminer les solutions de  $(E)$  développables en séries entières et préciser le rayon de convergence de la série entière associée.
3. Montrer que si  $g$  est solution de l'équation  $(E)$  sur un intervalle  $I$  contenu dans  $] -1; +\infty[$  alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in I, g(x) = C(1+x)^\alpha$ .
4. En déduire le développement en série entière de  $f$  en 0.

**Exercice 18.** Montrer que l'équation différentielle  $x^2 y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$  admet une unique solution développable en série entière et déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

**Exercice 19.**

1. Pour  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n(x) = \frac{1}{2^{nx}}$ .
  - (a) Justifier l'existence et calculer  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  pour  $x > 0$ .
  - (b) Justifier la dérivabilité de  $u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement sur tout intervalle  $[a, b]$  où  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $0 < a < b$ .
  - (c) Calculer alors la somme de cette série pour  $x > 0$ .
2. Trouver le rayon de convergence  $R$  des séries entières  $\sum a_n z^n$  où  $(a_n)_n$  est donnée par :
  - (a)  $a_n = \frac{n^3}{3^n}, \forall n \geq 0$ ,
  - (b)  $a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}, \forall n \geq 1$ , avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
*Indication : on pourra d'abord regarder le cas où  $|z| < 1$ , puis raisonner par l'absurde en utilisant la série dérivée.*
3. On considère l'équation différentielle  $(E) : xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une unique solution  $f$  de  $(E)$ , développable en série entière autour de 0 et telle que  $f(0) = 1$ .
  - (b) Exprimer  $f$  à l'aide des fonctions élémentaires.