Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Cursus préparatoire, $1^{\text{ère}}$ année, $2^{\text{ème}}$ semestre : Analyse

---

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

COURBES PARAMÉTRÉES DU PLAN

Exercice 5.1. Démontrer que la courbe paramétrée $\mathbb{R}^* \ni t \mapsto \left(2t - \dfrac{1}{t^2}, 2t + t^2\right) \in \mathbb{R}^2$ possède un point double dont on donnera les coordonnées.

Exercice 5.2. Déterminer les points d'inflexion de l'arc paramétré par $\mathbb{R} \ni t \mapsto \big((t-2)^3, t^2 - 4\big) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5.3. Déterminer la nature au point $t = 0$ des arcs paramétrés suivants :

1. $t \mapsto (t + 2t^2 - t^3, t + 2t^2 - t^7)$ **2.** $t \mapsto (-t + t^2, t^2 + t^3)$

3. $t \mapsto (-t^2 - 2t^3, -t^3 - t^5)$ **4.** $t \mapsto (t^2 + 3t^3 + t^4, -2t^2 - 6t^3 + t^4)$.

Exercice 5.4. Soit $a > 0$ fixé. Construire la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = a\sin^3(t) \end{cases}$$

Exercice 5.5. Construire la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$x(t) = \frac{t}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^4}.$$

Exercice 5.6. Construire la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

Exercice 5.7. Construire la courbe paramétrique définie pour $t > -2$ et $t \neq 0$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

On étudiera en particulier les points d'inflexion de cette courbe.

Exercice 5.8. Construire la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par :

$$x(t) = \frac{t}{t^2-1}, \quad y(t) = \frac{t^2}{t-1}.$$

On s'intéressera en particulier aux points d'intersection de la courbe avec ses différentes asymptotes et on étudiera l'existence de points doubles.

Exercice 5.9. Construire la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = a\sin(2t) \\ y(t) = a\sin(3t) \end{cases} \qquad \text{avec } a > 0.$$

Exercice 5.10. Construire la courbe paramétrique définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$x(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{4(1-2t)}{(1+t^2)^2}.$$

Que peut-on dire du point $(0,0)$?

Exercice 5.11. (Allure de la courbe au voisinage d'un point stationnaire)

1. Montrer que la courbe Γ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = (t+1)e^t \\ y(t) = t^2e^t \end{cases}$$

admet un point non régulier et un seul, et tracer l'allure de Γ au voisinage de ce point.

2. Tracer l'allure de la courbe Γ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = t^4 - t^3 - t^2 \\ y(t) = t^4 + t^3 + t^2 \end{cases}$$

au voisinage du point de paramètre $t = 0$.

Exercice 5.12. On considère la courbe Γ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$$

Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à la courbe Γ.