Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Maths III PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 5

QUELQUES APPLICATIONS DE LA RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

I. Calculs de puissances et d'exponentielles d'endomorphismes

Exercice 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note I_n la matrice identité.

1. Déterminer $e^{\lambda I_n}$.
2. Montrer que si A et B commutent alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $e^B = P^{-1}e^A P$.
4. Démontrer l'égalité : $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
5. Calculer l'exponentielle de chaque matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & -\theta \\ \theta & \lambda \end{pmatrix}$$

   où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{C}$ est non nul.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E vérifiant $(u - \mathrm{id}_E)^2 \circ (u - 2\,\mathrm{id}_E) = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}((u - \mathrm{id}_E)^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$.
2. Notons π_2 la projection sur $\mathrm{Ker}(u-2\,\mathrm{id}_E)$ parallélement à $\mathrm{Ker}((u-\mathrm{id}_E)^2)$ et π_1 la projection sur $\mathrm{Ker}((u - \mathrm{id}_E)^2)$ parallélement à $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$.
   Établir les identités suivantes : $e^u\pi_2 = e^2\pi_2$ et $e^u\pi_1 = eu \circ \pi_1$.
3. Exprimer en fonction de u les projections π_1 et π_2.
4. En déduire une expression de e^u en fonction de u.

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer en fonction de u les projecteurs spectraux de u.
2. Exprimer la matrice des projecteurs spectraux dans la base canonique.
3. Exprimer, pour tout entier $n \geq 0$, l'endomorphisme u^n en fonction de u. Écrire la matrice de u^n dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4. Exprimer, pour tout réel t, l'endomorphisme e^{tu} en fonction de u. Écrire la matrice de e^{tu} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Répondre aux mêmes questions pour les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont : $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ représenté dans la base canonique par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}$ oè les n premières colonnes sont égales.

1. Calculer le rang de u et en déduire que les valeurs propres de u sont égales.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer e^{tu} pour tout réel t.
4. Montrer qu'il existe trois fonctions $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha'(t) = \beta'(t) = \gamma'(t) = \alpha(t) + \beta(t) - 2\gamma(t)$$

   et $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$ et $\gamma(0) = 2$.
5. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, les solutions $X : t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du système différentiel

$$X'(t) = NX(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

   ont pour composantes des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 5. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de A.
2. Diagonaliser A.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que A soit inversible. Dans le cas où A est inversible, déterminer son inverse.
4. Calculer A^n pour tout entier n.
5. Calculer e^{tA} pour tout réel t.

Exercice 6. Soient E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme $u-(1-a)\,\mathrm{id}_E$. En déduire que $1-a$ est valeur propre de u.
2. Si $a=0$, l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Dans toute la suite, on suppose que le réel a est non nul.
   Déterminer toutes les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u.
5. Notons $E_1 = \mathrm{Ker}(u-(1-a)\,\mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(u-(1+3a)\,\mathrm{id}_E)$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
6. Exprimer en fonction de u les projections de E sur les sous-espaces E_1 et E_2.
7. Exprimer les endomorphismes u^k pour tout entier $k \geq 1$, et e^u en fonction de ces projections et en déduire leurs matrices dans la base canonique.

II. Résolutions de systèmes différentiels

Exercice 7. Résoudre le système différentiel $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

1. Montrer qu'une équation différentielle d'ordre n réelle (resp. complexe) , donnée par
$$\frac{d^n}{dt^n}z(t) + c_{n_1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) + \cdots + c_1\frac{d}{dt}z(t) + c_0 z(t) = f(t)$$
   où les c_i sont réels (resp. complexes) et f une fonction continue à valeurs réelles (resp. complexes), peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire à coefficients constants de la forme
$$\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + V(t).$$
2. Déterminer les fonctions x de $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ solutions de l'équation
$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + \frac{d^2}{dt^2}x(t) - \frac{d}{dt}x(t) - x(t) = \cos(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

Déterminer la solution du système $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$, prenant en $t=0$ la valeur x_0 contenue dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

Exercice 10. Déterminer la solution du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) + 9z(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) - 9z(t) \\ z'(t) = -3x(t) + 3y(t) - 8z(t) \end{cases}$$

telle que $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

II. Étude de suites récurrentes

Exercice 11. La suite de Fibonacci est définie par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ si $n \geq 2$ et $u_0 = u_1 = 1$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} \\ u_{n-1} & u_{n-2} \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 2$.
2. Diagonaliser A et en déduire une formule non récurrente pour u_n.

Exercice 12. Résoudre le système linéaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1} \end{cases}$$

Exercice 13. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}$.

1. En choisissant correctement le vecteur X_n et la matrice A, montrer que l'on peut réécrire l'expression de récurrence de la suite $(u_n)_n$ sous la forme d'une équation matricielle $X_{n+1} = AX_n$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3. Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.