
Feuille d'exercices n° 5

MATRICES ORTHOGONALES - GROUPE ORTHOGONAL

Exercice 1. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des réels tels que $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$.
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \xi_i \xi_j$ et soit $B = 2A - \mathrm{Id}$.
Montrer que B est une matrice orthogonale.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}) = (\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}))^{\perp}$.
En déduire que si $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$ alors $f = \mathrm{Id}$

Exercice 3. Soit E un espace euclidien (de dimension finie). Etant donné un sous-espace vectioriel F de E, on note p_F la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que p_F n'est pas nécessairement un endomorphisme orthogonal de E.
2. Montrer en fait que p_F est orthogonale si et seulement si $F = E$.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien de dimension finie. Soient a et b des vecteurs de E tels que $\|a\| = \|b\|$.
Montrer qu'il existe un unique hyperplan (i.e. un s.e.v. de dimension $\dim(E) - 1$) tel que $s_H(a) = b$, s_H désignant la symétrie orthogonale par rapport H.
On pourra commencer par faire un dessin sur $\mathbb{R}^3$ avec $a = (2, 0, 1)$ et $b = (2, 0, -1)$ en vue de déterminer H.

Exercice 5 (Étude de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$)**.** On rappelle que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = \mathrm{Id}_n\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble (s'il n'est pas vide) des valeurs propres de A est inclus dans $\{-1, 1\}$.
2. Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ou bien $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement ces deux formes et montrer que $\det(R_\theta) = 1$ et $\det(S_\theta) = -1$.
3. On note $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Soit $\theta \in R$. Montrer qu'il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $S_\theta A = S_{\theta'}$. En déduire que toute rotation s'obtient en composant deux réflexions.
   (c) Quels sont les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ qui ont des valeurs propres ?

Exercice 6. Soit E un espace euclidien de dimension 3. Soit $u \in \mathrm{SO}(E)) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$.

1. Étudier l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(u - t\mathrm{Id})$ et montrer que 1 est une valeur propre de u.
2. Soit $b \in E$ tel que $u(b) = b$ et $\|b\| = 1$. (Pourquoi un tel vecteur existe-t-il ?)
   Étudier la restriction de u à $(\mathrm{Vect}(b_1))^{\perp}$ et montrer qu'il existe une base orthonormée de E pour laquelle la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
3. Faire un dessin de la situation dans $\mathbb{R}^3$ en plaçant x et $u(x)$ avec $x \notin \mathrm{Vect}(b_1)$.