Feuille d'exercices n° 5
CALCUL DIFFÉRENTIEL

I. Fonctions d'une variable vectorielle

Exercice 1. On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Pour $N \in \mathbb{N}$, on munit l'espace vectoriel $E_N = \mathbb{R}_N[X]$ de la norme $\| \ \|$ définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{R}_N[X], \quad \|P\| = \max_{0 \leq k \leq N} |a_k| .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $\|PQ\| \leq (2n+1)\|P\|\|Q\|$.
2. Soit $H \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $HH' = o(\|H\|)$ lorsque $H \to 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.
3. Montrer que l'application $f : E_n \longrightarrow E_{2n-1}$ définie par $f(P) = (X^2 - X)P'' + 7PP'$ est différentiable sur E_n et déterminer sa différentielle en tout point de E_n.

Exercice 3. Pour les fonctions suivantes, déterminer les points a en lesquels la fonction est différentiable et déterminer sa différentielle en un tel point :

1. $f_1 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$,
2. $f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_2(z) = \mathrm{Re}(z)$.

(avec $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

Exercice 4. Soient E, F, G trois espaces vectoriels réels de dimensions finies. On considère une application $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ bilinéaire. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ (resp. $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$) une base de E (resp. F). On sait que l'on peut munir respectivement E et F des normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ définies par

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E, y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \in F, \quad \|x\|_E = \max_{i \in [\![1;n]\!]} |x_i| \text{ et } \|y\|_F = \max_{j \in [\![1;p]\!]} |y_j| .$$

1. Munissons $E \times F$ de la norme produit associée aux deux normes précédentes, notée $\| \ \|$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que :
$$\forall (x,y) \in E \times F, \quad \|\varphi(x,y)\|_G \leq C\|(x,y)\|^2.$$
2. Montrer que φ est différentiable en tout point $(x,y) \in E \times F$ et que
$$\mathrm{d}\varphi(x,y) : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & G \\ (h,k) & \longmapsto & \varphi(x,k) + \varphi(h,y). \end{array}$$

II. Fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 5. Justifier que les fonctions de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer leur matrices jacobiennes en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$) :

$$f : (x,y) \longmapsto e^{xy}(x+y), \quad g : (x,y,z) \longmapsto xy + yz + zx, \quad h : (x,y) \longmapsto (y \sin x, \cos x).$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y - y^3}{x^2+y^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1. Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.
2. L'application est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 8. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

3. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$. Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
4. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \min(x, y^2).$$

1. Montrer que les ensembles

$$\mathcal{U}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2\} \text{ et } \mathcal{U}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$$

sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ et expliciter les dérivées partielles de f en tout point de $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$.
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $x_0 = y_0^2$. Étudier l'existence des dérivées partielles de f en (x_0, y_0) et les calculer si elles existent. *(Indication : on pourra à un moment distinguer les cas $y_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$)*

III. Différentiation d'une composée

Exercice 10. Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}.$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pm\pi/2, \pi\}$. Notons

$$g : (r,\theta) \in]0; +\infty[\times \big(]0; 2\pi[\setminus \{\pm\pi/2, \pi\}\big) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Justifier l'existence et donner l'expression de $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

Exercice 11. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Montrer que l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x + g(x,y)) \end{array}$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \int_0^{e^{xy}} \sin\left(t^2\right) dt.$$

En considérant f comme la composée de deux applications, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis écrire sa matrice jacobienne en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs non nulles. Montrer que l'application inverse $\dfrac{1}{f}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et donner sa différentielle en tout point de u.

Pour s'entraîner :

Exercice 14. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $f : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, justifier l'existence de la quantité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, et la calculer.