

**Feuille d'exercices n° 5**

CALCUL DIFFÉRENTIEL

**I. Dérivées directionnelles et classe  $\mathcal{C}^1$  :**

**Exercice 1.** Étudier l'existence de la dérivée de la fonction  $f : (x, y) \mapsto xy^2$  suivant le vecteur  $v = (1, -2)$  au point  $a = (2, 1)$ . Déterminer sa valeur si elle existe.

**Exercice 2.** Soit  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par  $G(x, y, z) = (x \sin y, y \sin x, z)$ . Justifier l'existence et calculer  $\text{div}(G)$ ,  $\text{rot}(G)$  et  $\text{grad} \circ \text{div}(G)$ .

**Exercice 3.** Justifier que les fonctions de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  suivantes sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , et calculer leur matrices Jacobiennes en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  (resp.  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ) :

$$f : (x, y) \mapsto e^{xy}(x + y), \quad g : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx, \quad h : (x, y) \mapsto (y \sin x, \cos x)$$

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

Montrer que  $f$  admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en  $(0, 0)$  mais n'est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur aucun ouvert contenant  $(0, 0)$ .

**Exercice 5.** On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$  et les calculer.
2. Montrer que  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x, y) = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ .

1. Justifier l'existence et donner le développement limité à l'ordre 1 de  $f$  au point  $(-4, 3)$ .
2. Donner une valeur approchée de  $f(-4.01, 3.01)$ .

**Exercice 7.** Soit  $f : (\mathbb{R}_+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{y} + \sqrt{x})$ . Déterminer l'ensemble des points où

1.  $f$  est continue,
2.  $f$  admet des dérivées partielles,
3.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert contenant ce point,
4.  $f$  admet des dérivées directionnelles.

## II. Fonctions composées

**Exercice 8.** On considère les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définies par  $f(x, y) = x^2 - y^2$  et  $g(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$ .

1. Expliciter  $h = f \circ g$ .
2. Justifier que les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  sont de classe  $C^1$  et écrire leurs matrices Jacobiennes (en un point de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  respectivement).
3. Vérifier l'égalité  $J_h(x, y, z) = J_f(g(x, y, z)) \times J_g(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
4. Écrire le développement limité de  $f$ ,  $g$  et  $h$  à l'ordre 1 à l'origine.

**Exercice 9.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$  données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*.$$

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ , on pose  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pm\pi/2, \pi\}$ . Notons  $g : (r, \theta) \in ]0; +\infty[ \times (]0; 2\pi[ \setminus \{\pm\pi/2, \pi\}) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Justifier l'existence et donner l'expression de  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial g}{\partial r}$ .

**Exercice 10.** Soit  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$  une courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^2$  (une application d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ ) de classe  $C^1$ . Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy}$ . En sachant que  $\gamma(0) = (1, 2)$ , et  $\gamma'(0) = (3, 4)$ . Justifier la dérivabilité de  $f \circ \gamma$  et trouver la valeur de  $(f \circ \gamma)'(0)$ .

**Exercice 11.** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On pose  $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ . Calculer pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  la quantité  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  en justifiant son existence.

## III. $C^1$ -difféomorphismes :

**Exercice 12.** Soit  $k \in \mathbb{R}^*$  et  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application définie par  $\varphi(x, y) = (x, x + ky)$ . Montrer que  $\varphi$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même.

**Exercice 13.** (Coordonnées sphériques)

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : ]0; +\infty[ \times ]-\pi; \pi[ \times ]0; \pi[ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r, \theta, \varphi) &\mapsto (r \cos(\theta) \sin(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

est un  $C^1$ -difféomorphisme.

**Exercice 14.** Soit  $k \in \mathbb{R}^*$ . On cherche les applications  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  solutions du système (S) :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, & k \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, & f(0, y) = \sin y \end{cases}$$

Pour cela, on substitue à cette relation une relation plus simple portant sur une application  $F$ , déduite de  $f$  par le changement de variable  $\varphi$  de l'exercice ???. Autrement dit, on considère l'application  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f = F \circ \varphi$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$  en fonction de celles de  $F$ .
3. Vérifier que  $f$  est solution de  $(S)$  si et seulement si  $F$  vérifie  $(S')$  :

$$\begin{cases} \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, & \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0 \\ \forall v \in \mathbb{R}, & F(0, v) = \sin\left(\frac{v}{k}\right) \end{cases}$$

4. Déterminer les solutions de  $(S')$ .
5. Conclure.

**Exercice 15.** Soient  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v > 0\}$  et l'application  $\varphi : D \rightarrow D$  définie par  $\varphi(u, v) = (\sqrt[3]{uv}, v)$ .

1. Montrer que  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que l'application  $\varphi$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $D$  dans  $D$ .
3. À l'aide du changement de variables  $(x, y) = \varphi(u, v)$ , résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x, y) \in D, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4 \frac{y^2}{x^2},$$

d'inconnue  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 16.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par  $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$ . Montrer que  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  sur son image  $f(\mathbb{R}^3)$ , et que  $f(\mathbb{R}^3)$  est un ouvert strictement inclus dans  $\mathbb{R}^3$ .

#### IV. Dérivées partielles d'ordres supérieurs

**Exercice 17.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Vérifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
3. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}^2$  et calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
4. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 18.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $f$  possède des dérivées partielles premières en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
3. La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?
4. Montrer que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  existent à l'origine et les calculer.
5. Peut-on trouver un ouvert (de  $\mathbb{R}^2$ ) contenant  $(0, 0)$  sur lequel la fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  ?