

Feuille d'exercices d'analyse n° 5

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

Exercice 1.

Déterminer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \frac{t}{t^2 + 1} dt & 2) \int \sin t \cos^5 t dt & 3) \int \cos^3 t dt \\
 4) \int t \sin(t^2 + 1) dt & 5) \int \frac{t^2}{\sqrt[3]{1 - 2t^3}} dt & 6) \int \frac{1}{t \ln t} dt
 \end{array}$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_1^2 \frac{dt}{t^2} & 2) \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt & 3) \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\
 4) \int_1^2 \ln t dt & 5) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} dt & 6) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t} dt
 \end{array}$$

Exercice 2. Déterminer les primitives suivantes :

$$1) \int \frac{dt}{it + 1} \quad 2) \int e^t \cos t dt \quad 3) \int t \sin te^t dt$$

Exercice 3. (Intégration par parties)

Déterminer les primitives suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1) \int t \ln t dt & 2) \int t \arctan t dt & 3) \int t \sin^3 t dt \\
 4) \int (t^2 - t + 1)e^{-t} dt & 5) \int (t - 1) \sin t dt & 6) \int (t + 1) \operatorname{ch} t dt
 \end{array}$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt \quad 2) \int_0^{1/2} \arcsin t dt \quad 3) \int_0^1 \arctan t dt \quad 4) \int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$$

Exercice 4. (Changement de variable)

Déterminer les primitives suivantes :

$$1) \int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \quad 2) \int \frac{\ln t dt}{t + t(\ln t)^2} \quad 3) \int \frac{e^{2t} dt}{e^t + 1}$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_1^e \frac{dt}{t + t(\ln t)^2} \quad 2) \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}} \quad 3) \int_0^1 \frac{dt}{e^t + 1}$$

Exercice 5. (Trinôme réductible au dénominateur)

1. Ecrire $3t^2 - 9t + 6$ sous la forme $3(t - a)(t - b)$.
2. Trouver deux réels α et β tels que $\frac{1}{3t^2 - 9t + 6} = \frac{\alpha}{t - a} + \frac{\beta}{t - b}$.
3. Trouver les primitives $\int \frac{1}{3t^2 - 9t + 6} dt$.

Exercice 6. (Trinôme irréductible au dénominateur)

1. Trouver les primitives de $\int \frac{1}{1+t^2} dt$ et de $\int \frac{2t+3}{1+t^2} dt$.
2. Trouver les primitives de $\int \frac{1}{4+(t-5)^2} dt$ (On se ramènera au cas précédent).
3. Déterminer les primitives de $\int \frac{1}{3t^2+4t+22/9} dt$ et de $\int \frac{50t+13}{t^2+t+1} dt$.

Exercice 7. (En vrac)

Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 \frac{t-1}{(t^2-2t+3)^2} dt$
- 2) $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$
- 3) $\int_{-1}^1 (\cos t)^{1234} \sin t dt$
- 4) $\int_{-2}^0 t\sqrt{4-t^2} dt$
- 5) $\int_1^e \frac{(\ln t)^2}{t} dt$
- 6) $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2} dt$
- 7) $\int_0^1 \frac{t^2+2t+3}{t+1} dt$
- 8) $\int_{-2}^2 \frac{t}{t^2-4t+5} dt$
- 9) $\int_1^e t^n \ln t dt, n \in \mathbf{N}$
- 10) $\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$
- 11) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt$
- 12) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln t}{t^2} dt$

Exercice 8. Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan compris entre les courbes d'équations respectives $y = 2x^2 - 2x + 1$ et $y = x^3 - 3x + 3$ dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 9. (Intégrales de Wallis¹)

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n = J_n$.
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Trouver une relation liant I_{n+2} et I_n .
4. Montrer par récurrence que

$$I_n = \begin{cases} \frac{n! \pi}{2^{n+1}(k!)^2} & \text{si } n = 2k \text{ est pair,} \\ \frac{2^{n-1}(k!)^2}{n!} & \text{si } n = 2k + 1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

5. En déduire la valeur de

$$\int_{-1}^1 (1+t)^n (t-1)^n dt \quad (n \in \mathbf{N}).$$

1. John Wallis (1616-1703). Mathématicien anglais. Inventeur du signe ∞ .