Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2013-2014

Math I - CPGEI

Feuille d'exercices n° 4

ÉTUDES DE FONCTIONS

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ qui vérifient :
   (a) $\lfloor x \rfloor = 0$;
   (b) $\lfloor x \rfloor = -3$;
   (c) $\lfloor x \rfloor = \frac{1}{2}$.
2. Représenter graphiquement l'application $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 2. Étudier l'existence d'une limite de f au point a pour les données suivantes :

1. $a = 1$ et $f : \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;
2. $a = 0$ et $f : \mathbf{R}^\star \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto x^2 + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;
3. $a = +\infty$ et $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$;
4. $a = -\infty$ et $f :]-\infty, -5] \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto 3 + \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 1}$;
5. $a = 0$ et $f :]0, \frac{\pi}{3}[\longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sin(3x)}$;
6. $a = 0$ et $f :]0, \pi[\longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$.

Indication : on rappelle que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Exercice 3. Étudier la continuité des fonctions suivantes en tout point de leur domaine :

1. $f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$;
2. $f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $x \longmapsto E(x) + E(2 - x)$.

Exercice 4. Déterminer en quels points les fonctions qui suivent sont dérivables, et donner leur dérivée.

1. $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto |x|$;
3. $f_3 :]1, +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \ln(\ln x)$;
4. $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto (x^2 + x^4)^{\frac{1}{4}}$;
5. $f_5 : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}} (\cos(x))^5$;
6. $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 2}{\sqrt{x^2 + 1} + 2}$;
7. $f_7 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto (x^2 + 1)\, 2^x$.

Exercice 5.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x > x$.
2. On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x - x}$.
   (a) Justifier que f est continue sur $\mathbf{R}$.
   (b) Calculer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   Rappel : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) En déduire que f atteint un maximum sur $\mathbf{R}$ puis le déterminer.

Exercice 6. On pose $a = 4$ et $\varepsilon = 0,4$.
À l'aide du graphe de $\sqrt{\cdot}$, déterminer $\delta > 0$ tel que si $x \in \mathbf{R}_+$ est tel que $|x - a| < \delta$, alors $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.
On veillera à préciser par le calcul les valeurs nécessaires.

Exercice 7. On définit $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de f.
2. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Déterminer la position du graphe de f par rapport aux asymptotes.
6. Tracer le graphe de f avec précision.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > -2$.
   On veillera à préciser par le calcul les valeurs nécessaires.

Exercice 8. On s'intéresse à la fonction tangente.

1. Redémontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\,\mathbf{Z}\right)$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.
2. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de tan.
3. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
4. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
5. Tracer le graphe de tan avec précision.

Exercice 9. On définit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto x - \ln(1 + x^2)$.
Rappel : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$.

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de f.
2. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
3. Donner l'équation des tangentes en les points précédents.
4. Montrer que f admet des directions asymptotiques en $+\infty$ et en $-\infty$, mais pas d'asymptotes.
5. Tracer le graphe de f avec précision.

Exercice 10. *Folium de Descartes.*

On définit d'abord $x : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ t \longmapsto \dfrac{3t}{1+t^3}$ et $y : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ t \longmapsto \dfrac{3t^2}{1+t^3}$ puis $\gamma : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}^2,\ t \longmapsto (x(t), y(t))$.

L'objectif de cet exercice est de tracer la courbe $\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}\}$.

1. Calculer, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 0\}$, $x(1/t)$ et $y(1/t)$.
   En déduire que l'on peut se ramener à étudier γ sur $]-1, 1]$.
2. Dresser les tableaux de variation de x et de y.
3. (a) Calculer, pour tout $t \in]-1, 1]$, $y(t) - (-x(t) - 1)$.
   (b) Déterminer le signe de cette expression pour $t \in]-1, 1]$, puis sa limite quand t tend vers -1.
   (c) Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
4. Tracer Γ.
5. On définit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x, y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$. Calculer $f \circ \gamma$.

Exercice 11. Montrer qu'existent et déterminer les limites suivantes,

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{e^{x\cos(x)} - 1}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\cos(1+x) - \cos(1-x)}{x}.$$

Exercice 12.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'on a : $e^x > 1 + \frac{1}{2}x^2$.
2. Montrer que la limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2}$ existe et la calculer.

Exercice 13.

1. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbf{R}$ continue, et dérivable sur l'intérieur de I.
   Montrer que si f' est croissante, alors
   $$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall t \in [0, 1], \qquad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
   On dit alors que f est *convexe*.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$ et tout $t \in [0, 1]$, l'on a :
   $$\ln(tx + (1-t)y) \ \geq\ t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$
3. Soit $(p, q) \in [1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
   (a) Montrer que, pour tout $(a, b) \in (\mathbf{R}_+)^2$, l'on a :
   $$ab \ \leq\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}_+$ et tout $\lambda > 0$,
   $$ab \ \leq\ \lambda^p\, \frac{a^p}{p} + \lambda^{-q}\, \frac{b^q}{q}.$$
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $((a_1, \cdots, a_n), (a_1, \cdots, a_n)) \in (\mathbf{R}^n)^2$,
   $$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \ \leq\ \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 14.

1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto e^{x^7+x^5+1}$ est injective.
2. Déterminer $E \subset \mathbf{R}$ tel que $\tilde{f} : \mathbf{R} \to E$, $x \longmapsto f(x)$ soit une bijection.

Exercice 15. Déterminer si elles existent les valeurs des minima ou des maxima des ensembles qui suivent.

1. $A_1 = \left\{ \dfrac{1+x}{1+x^2} \;\middle|\; x \in \mathbf{R} \right\}$;
2. $A_2 = \left\{ x^4 - 6x^2 \mid x \in \mathbf{R} \right\}$;
3. $A_3 = \left\{ 6x - x^2 \mid x \in [2,5] \right\}$;
4. $A_4 = \left\{ x^2 + y^2 \mid (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ xy = 1 \right\}$;

Exercice 16. Représenter graphiquement l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \arcsin(\cos x)$.

Exercice 17. Étudier la fonction $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \arcsin x + \arccos x$.

Exercice 18. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ et que, pour tout $x \in \mathbf{R}_-^\star$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 19. On définit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x - \ln(\operatorname{ch} x)$.

1. Étudier le signe et la monotonie de la dérivée de f.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrer que le graphe de f admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Déterminer en quels points le graphe de f intersecte les axes des abscisses et des ordonnées.
5. Donner une équation de la tangente en les points précédents.
6. Tracer le graphe de f avec précision.
7. Déterminer graphiquement les ensembles suivants : $f(\mathbf{R})$, $f([0,+\infty[)$ et $f^{-1}(\mathbf{R}_-^\star)$.

Exercice 20. On définit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \cos(3x) \times \cos^3 x$.

1. Montrer que f est paire et 2π-périodique.
2. Étudier les variations de f puis construire sa courbe représentative.