Feuille d'exercices n° 4

UTILISATION DES FORMULES DE TAYLOR

Exercice 4.1. Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrer l'encadrement suivant :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 4.2. Soit x un réel tel que $0 < x < 1$. Démontrer l'inégalité : $\operatorname{ch} x < 1 + x^2$.

Exercice 4.3. Soit $a > 0$.

1. Ecrire la formule de Taylor pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0; a]$, avec le reste à l'ordre 5. Montrer que l'on a :
$$\left|\cos a - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| \leq \frac{a^5}{5!}.$$
2. En déduire l'encadrement :
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\frac{1}{2} \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}.$$

Exercice 4.4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a les inégalités :

$$0 < (1+x)^{1/3} - 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} < \frac{5x^3}{81}.$$

Exercice 4.5.

1. Ecrire la formule de Taylor pour le logarithme népérien sur l'intervalle $[1; 2]$ avec le reste à l'ordre 3. En déduire que $\frac{1}{2} < \ln 2$.
2. Ecrire la formule de Taylor pour l'exponentielle sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, avec le reste à l'ordre 4. En déduire, à l'aide de la question précédente, que :
$$\frac{79}{48} < \sqrt{e} < \frac{79}{48} + \frac{1}{192}.$$

Exercice 4.6.

1. Appliquer la formule de Taylor à la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ entre 25 et 26, avec un reste à l'ordre 2.
2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 4.7. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et soit M une constante positive. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\varphi''(t)| \leq M$.

1. Montrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi(t) + s\varphi'(t) + \dfrac{s^2}{2}M \geq 0$.
2. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $|\varphi'(t)| \leq \sqrt{2M}\sqrt{\varphi(t)}$.

Exercice 4.8. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On suppose en outre que f est dérivable en 0 et en 1, et que $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. On désigne par g l'application de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x \in]0;1[$ par
$$g(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}.$$
   (a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$. (On justifiera l'existence de ces limites.)

   (b) On prolonge alors g à $[0;1]$ en posant
$$g(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) \quad \text{et} \quad g(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x).$$
   Montrer que g ainsi prolongée est continue sur $[0;1]$, et en déduire, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un $\alpha \in]0;1[$ tel que :
$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}.$$
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.
2. On suppose désormais que f est deux fois dérivable sur $[0;1]$. Soit $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

   (a) On suppose ici que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$. Ecrire la formule de Taylor pour f sur l'intervalle $[0;\alpha]$ et en déduire l'existence d'un c dans $]0;\alpha[$ tel que $f''(c) \geq 4$.

   (b) On suppose ici que $\alpha > \dfrac{1}{2}$. A l'aide d'une méthode analogue, montrer cette fois l'existence d'un d dans $]\alpha;1[$ tel que $f''(d) \leq -4$.

   (c) En conclure qu'il existe $\beta \in]0;1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$.

Exercice 4.9.

1. Soit $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer qu'il existe un unique $\theta_x \in]0;1[$ tel que :
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta_x x).$$
2. En écrivant par ailleurs la formule de Taylor-Lagrange avec reste à l'ordre 5 pour sin entre 0 et x, montrer que θ_x admet une limite quand x tend vers 0^+ et préciser cette limite.