

Feuille d'exercices n° 4

SUITES DE FONCTIONS

Exercice 1. Convergence simple et uniforme

On étudie les suites de fonctions réelles définies par $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{x+n} + \arctan(x)$ et $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{nx}{1+nx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Les suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent-elles simplement sur $[0, 1]$?
2. Convergent-elles uniformément sur $[0, 1]$? Sur $]0, 1[$? Soit $a \in]0, 1[$. Convergent-elles uniformément sur $[a, 1]$?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur $[1, +\infty[$?

Exercice 2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2) \exp(-nx^2).$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$, puis sur $[0, 1[$, puis sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$f_n(x) = \min \left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer (si elle existe) la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$.
3. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Exercice 5. Convergence et intégrales

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur $[0, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, 1]$.

Exercice 6. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n e^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente sur le segment $[a, b]$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[a, +\infty[$.
4. Calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 7. Soit $(f_n)_{n \geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x^2 + 2n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{2}{n}] ; \\ 0 & \text{si } x \in]\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

3. En déduire que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies par

$$\begin{aligned} f_n : \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos^n(x) \sin(x). \end{aligned}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ définies par $g_n = (n+1)f_n$. Montrer que sur tout intervalle de la forme $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ avec $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $(g_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ne tend pas vers 0.

Exercice 9. Convergence dominée

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx$,
2. $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$.

Exercice 10. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx$,
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n \sqrt[n]{1+x^n}}$.

Exercice 11. Déterminer la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, de $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \geq 0$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et intégrable.

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$.

Exercice 13. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

Exercice 14. Convergence uniforme et dérivées

Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.
2. Étudier la convergence de $(g'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[-1, 1]$.
3. On considère la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1, 1]$ par $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers 0.

Exercice 15. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Étudier les modes de convergence de la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Pour aller plus loin :

Exercice 16.

1. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un même intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et (x_n) une suite d'éléments de I . On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction **continue** f et que la suite $(x_n)_n$ converge vers un réel $x \in I$. Montrer que $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.
2. En déduire que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = \cos(nx)$ n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Retrouver le résultat de la question 2 sans utiliser la question 1 en raisonnant par l'absurde et en considérant l'intégrale sur tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ de la fonction limite uniforme.