Feuille d'exercices n° 4
TOPOLOGIE ET FONCTIONS LINÉAIRES

1 Topologie

Exercice 1. Soient K et F deux parties non vides, disjointes de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque.

1. On suppose K compact et F fermé dans $\mathbb{R}^n$. On définit $d(K,F) = \inf\{\|k-f\|; (k,f) \in K \times F\}$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que $\|a-b\| = d(K,F)$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, en considérant l'hyperbole déquation $xy = 1$ et l'axe des abscisses, montrer que le résultat précédent est en général faux si K est supposé fermé non compact.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E.
On définit $A + B = \{a + b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A + B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compacts alors $A + B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A + B$ n'en est pas un.

Exercice 3. D'après le cours, on sait que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées. On va montrer que ceci est faux en dimension infinie.
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ défini ainsi : pour $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d \in E$ on pose $\|P\| = \sum_{j=0}^{d} |a_j|$.

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E.
2. Soit (P_n) une suite de E convergente vers $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$. Notons, pour tout n, $P_n = a_{n,0} + a_{n,1}X + \cdots + a_{n,d_n}X^{d_n}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{n,k})_n$ converge vers a_k dans $\mathbb{R}$.
3. Notons $S = \{P \in E \mid \|P\| = 1\}$. Montrer que la suite (X^n) est une suite de S et n'admet pas de sous suite convergente (dans S). Conclure.

Exercice 4. Soit A une partie non vide d'un espace métrique (X,d). On pose pour tout $r > 0$, $B(A,r) = \{x \in E, d(x,A) < r\}$. On note aussi, pour tout $A \subset X$, et $x \in X$, $d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)$.

1. Soit $A \subset X$, montrer que pour tout $x, y \in X$,

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

2. En déduire que pour un sous ensemble $A \subset X$ fixé, la fonction $x \in X \to d(x,A)$ est continue.
3. Soit A et B sont deux parties fermées, non vides, et disjointes de l'espace métrique (X,d). Montrer que $d(x,A) + d(x,B) > 0$ pour tout $x \in X$.
   Si $x \in X$, on pose
   $$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$
4. Montrer que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et que $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$.
5. En déduire qu'il existe des ouverts U et V de X tels que :
   $$A \subset U, \quad B \subset V, \quad U \cap V = \emptyset$$

2 Fonctions linéaires

Exercice 5. Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. f est continue en 0
3. il existe une constante C telle que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$
4. f est lipschitzienne.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$, la norme de la convergence uniforme sur $[0,1]$. Soit $T : E \to E$ l'application linéaire définie pour $f \in E$ par
$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

1. Montrer que l'application T est continue et que $|||T|||_{\mathcal{L}_c(E)} = 1$.
2. Cette norme est-elle atteinte ? C'est à dire, existe t-il une fonction $f \in E$ telle que $\|T(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$.
3. Mêmes questions si l'on munit E de la norme $\|.\|_1$.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(]0,1[, \mathbb{R})$, et D l'endomorphisme de E défini par $D(f) = f'$.

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E telle que D soit continu.
   Indication. Considérer la suite de fonctions $f_n(t) = e^{nt}$.
2. Soit F le sous-ensemble de E constitué des fonctions polynomiales. Montrer qu'il existe une norme pour laquelle la restriction $D_{|F}$ de D à F est continue.

Exercice 8. Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

1. Montrer que $E = \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et que $\|.\|$ est une norme de E.
2. Soit $\Phi : E \ni g \to (g \, o \, f) \in E$, avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application fixée. Montrer que Φ est une application linéaire continue.