Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Séries numériques

---

1 Rappels : comparaison locale de fonctions

Exercice 1.

1. Est-ce que $]-1;0[\cup]0;1[$ est un voisinage de 0 ? un voisinage pointé ?
2. Soient f, g et h des fonctions réelles de la variable réelle définies sur un voisinage pointé de x_0 (avec $x_0 \in \mathbb{R}$ ou x_0 infini). Démontrer les assertions suivantes :
   (a) si $g =_{x_0} o(h)$ alors $fg =_{x_0} o(fh)$,
   (b) si $f \sim_{x_0} g$ et $h =_{x_0} o(f)$, alors $h =_{x_0} o(g)$,
   (c) si $f =_{x_0} o(g)$ et $g =_{x_0} \mathcal{O}(h)$, alors $f =_{x_0} o(h)$.

Exercice 2. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Pour les fonctions g suivantes, expliquer si l'on a ou non $f \sim_{+\infty} g$:

1. $g(x) = x^4$, 2. $g(x) = 2x^4$, 3. $g(x) = x^4 + 1$, 4. $g(x) = x^4 + \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Vrai ou faux ?

1. $x \sim_0 0$, 2. $x^3 =_{+\infty} o(x^3 + x^2)$, 3. $\sin(x) =_0 x + o(x)$, 4. $1 =_0 \cos(x) + o(x^2)$
5. $o(f) + o(f) =_{x_0} o(f)$, 6. $o(x^2) + o(x) =_0 o(x)$, 7. $\ln(1+x) - x =_0 o(1)$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)}\right)$.

2 Quelques séries simples

Exercice 5. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ (on appliquera ici Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et 1),
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (on appliquera ici Taylor-Lagrange à la fonction $-\ln(1+x)$ entre 0 et 1.

Exercice 6. Étudier la convergence des séries $\displaystyle\sum \frac{n^2}{n^2+1}$, et $\displaystyle\sum \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

3 Séries à termes positifs

Exercice 7. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. (a) $u_n = \dfrac{n+1}{n^3-7}$,
   (b) $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-7}$,
   (c) $u_n = \dfrac{n+1}{n-7}$,
   (d) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
   (e) $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$,
   (f) $u_n = \dfrac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$,
2. (a) $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$, (b) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$, (c) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$, (d) $u_n = \dfrac{n^{100\ 000}}{2^n}$,
3. (a) $u_n = \dfrac{1}{n!}$, (b) $u_n = \dfrac{n^{100\ 000}}{n!}$, (c) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$, (d) $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$,
4. (a) $u_n = \left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, (b) $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, (c) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 8.

1. Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^3(x)}$.
2. Montrer que pour $a > 1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$ est convergente.
3. On pose $u_n = \dfrac{1}{n\ln^3(n)}$ pour $n \geq 2$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
4. Donner un encadrement de R_n, le reste d'ordre n de $\sum u_n$.

Exercice 9. Déterminer la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$.

Exercice 10.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n}2^{-n}$, et $v_n = u_n - u_{n+1}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim_{n\to+\infty} \alpha v_n$.
2. Trouver un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k}2^{-k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

Exercice 11. Cas limite de la règle de d'Alembert
Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_n u_n$?

4 Séries à termes quelconques

Exercice 12. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. (a) $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$, (b) $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{C}$, (c) $u_n = na^{n-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$,
2. (a) $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{\ln(n+1)}$, (b) $u_n = \sin\left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$, (c) $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

Exercice 13. Une erreur classique

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 14. On considère deux suites complexes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. On s'intéresse à la convergence de la série $\displaystyle\sum_n u_n v_n$. Pour $n \geq 1$, on note $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$, on a :
$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = s_q v_q - s_{p-1} v_p + \sum_{k=p}^{q-1} s_k (v_k - v_{k+1}).$$
2. Montrer que si la suite $(s_n)_n$ est bornée, et si la suite $(v_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, décroissante et de limite nulle, alors $\displaystyle\sum_n u_n v_n$ est convergente.

Exercice 15. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les deux cas suivants : $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$ et $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$. Pour l'étude de cette dernière, on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 16.

1. En linéarisant $\cos^2(n)$, montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{n}$ diverge.
2. En utilisant un développement limité, montrer que la série de terme général $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, pour $n \geq 1$, diverge.

Exercice 17. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les deux cas suivants :

1. $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.

Exercice 18. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.

Exercice 19. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$.

Exercice 20. Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{3/4}}\right)$,
2. $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n}\right)$,
3. $\displaystyle\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right)\right)$.