
Feuille d'exercices n° 4

Séries de fonctions

Exercice 1. Convergence simple et normale

Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1[$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$,
2. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $a>0$,
3. $f_n : x \longmapsto \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2. Convergence uniforme

Reprendre les fonctions et les ensembles de l'exercice 1 et étudier la convergence uniforme des séries de fonctions données.

Exercice 3. Convergence simple, uniforme et normale

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

Exercice 4. Règle d'Abel uniforme

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur I telle que pour tout $x \in I$, $f_n(x) = a_n(x)b_n(x)$ avec $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles, $(b_n)_n$ une suite de fonctions complexes vérifiant

(i). $\forall x \in I$, la suite $(a_n(x))_{n\geq 0}$ est positive et décroissante,

(ii). la suite de fonctions $(a_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I,

(iii). il existe $M>0$ tel que pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\left\|\sum_{k=0}^{n} b_k\right\|_\infty \leq M$, *i.e* pour tout $x \in I$, $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} b_k(x)\right| \leq M$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k(x)$ et B_{-1} la fonction nulle. Pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $b_n(x)$ en fonction des B_k.
2. Soient $n,p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq 2a_{n+1}(x)M$.
3. En déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Exercice 5. Règle d'Abel uniforme (II)

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$ pour tout $x \in [-\pi, -\pi/2]$.

1. En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, -\pi/2]$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-\pi, -\pi/2]$.

Exercice 6. Série de fonctions et intégrale, et dérivée

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et donner une expression de $f'(x)$ sous forme de série pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Classe $\mathcal{C}^\infty$

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 8. On pose $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Sa somme est-elle continue ?
3. Étudier le comportement en $+\infty$ de sa somme S définie par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Examen Janvier 2011

On considère la série de fonctions $\sum f_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1}.$$

1. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $E_s = [0, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur $E_a =]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur E_s.
   (d) La série converge-t-elle normalement sur E_s ? Et sur E_a ? Justifier.
2. Soit S la fonction somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, $S(t)$ tend vers 1.
3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\inf(A)$ pour que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A.

Exercice 10. Examen Décembre 2007

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x e^{-nx^2/2} \end{array}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$? On discutera suivant les valeurs de α.
3. Montrer que pour tout $h > 0$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[h; +\infty[$ vers la fonction nulle.
4. On se place maintenant dans le cas particulier où $\alpha = 1$ et on considère maintenant la série de fonctions de terme général f_n.
   (a) Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et que sa somme $S : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
   (b) Calculer, pour $x \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $S_m(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} f_n(x)$, puis expliciter $S(x)$ pour $x \geq 0$.
   (c) La fonction S est-elle continue en 0 ?