Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de Printemps 2013-2014

Math IV - Analyse - PMI

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice I : Convergence simple et normale

Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, sur $[0, +\infty[$, puis sur $[0, 1[$, puis sur $[0, a]$ avec $a \in]0, 1[$.
2. $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$, sur $[0, +\infty[$ puis sur $[0, a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{n^3+x^{3/2}}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice II : Convergence uniforme

Reprendre les fonctions et les ensembles de l'exercice 1 et étudier la convergence uniforme.

Exercice III : Convergence simple, uniforme et normale

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$.

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle elle converge normalement.

Exercice IV : Règle d'Abel uniforme

Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur I telle que pour tout $x \in I$, $f_n(x) = a_n(x)b_n(x)$ avec $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions réelles, $(b_n)_n$ une suite de fonctions complexes vérifiant

(i). $\forall x \in I$, la suite $(a_n(x))_{n\geq 0}$ est positive et décroissante,

(ii). la suite de fonctions $(a_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I,

(iii). il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, $\left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \right\|_\infty \leq M$, *i.e* pour tout $x \in I$, $\left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k(x) \right| \leq M$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k(x)$ et B_{-1} la fonction nulle. Pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $b_n(x)$ en fonction des B_k.
2. Soient $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq 2a_{n+1}(x)M$.

3. En déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Exercice V : Règle d'Abel uniforme (II)

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n+x}$ pour $x \in [-\pi, -\pi/2]$.

1. En utilisant la règle d'Abel uniforme, montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[-\pi, -\pi/2]$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-\pi, -\pi/2]$.

Exercice VI : Série de fonction et intégrale, et dérivée

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que $\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.
4. Montrer que $f'(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice VII : Classe $\mathscr{C}^\infty$

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice VIII

On pose $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Sa somme est-elle continue ?
3. Etudier le comportement en $+\infty$ de sa somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Exercice IX : Examen Janvier 2011
On considère la série de fonctions
$$\sum \frac{(-1)^n e^{-nt}}{n+1} \quad (1).$$

1. a. Montrer que la série de fonctions (1) converge simplement sur $E_s = [0, +\infty[$.

   b. Montrer que la série de fonctions (1) converge absolument sur $E_a =]0, +\infty[$.

2. Soit $S(t)$ la somme de la série (1) pour $t \in E_s$. Montrer que lorsque t tend vers $+\infty$, $S(t)$ tend vers 1.

3. Montrer que la série (1) converge uniformément sur E_s.

4. La série converge-t-elle normalement sur E_s ? Et sur E_a ? Justifier.

5. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\inf_{t \in A} t$ pour que la série (1) converge normalement sur A.

Exercice X : Examen Décembre 2007
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction
$$f_n : \mathbb{R}^+ \to: \mathbb{R}$$
$$x \to n^\alpha x e^{-nx^2/2}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$? On discutera suivant les valeurs de α.

3. Montrer que pour tout $h > 0$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[h; +\infty[$ vers la fonction nulle.

4. On se place maintenant dans le cas particulier où $\alpha = 1$ et on considère maintenant la série de fonction de terme général f_n.

   a. Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et que sa somme $S : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]0; +\infty[$.

   b. Calculer, pour $x \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$, puis expliciter $S(x)$ pour $x \geq 0$.

   c. La fonction S est-elle continue en 0 ?