
Feuille d'exercices n° 4

MATRICES SYMÉTRIQUES - ENDOMORPHISMES AUTO-ADJOINTS

Exercice 1. Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on note u l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. Pourquoi u est-il autoadjoint ? Diagonaliser u dans une base orthonormée.

Faire de même avec

$$N = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique et qu'il existe un entier k, $k \geq 2$, tel que $A^k = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $A^2 = \mathrm{Id}$.
2. A est-elle nécessairement diagonale ?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donner l'espace des solutions de l'équation : $A^2 = \mathrm{Id}$.
4. Pour chaque solution trouvée, donner une interprétation géométrique de l'application induite sur le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit k un entier positif non nul.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles. Montrer que tout vecteur propre de M^k est un vecteur propre de M.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient q et q' des formes quadratiques positives sur E et A et A' leur matrice dans une base donnée $\mathcal{B}$. Montrer que si $A^k = {A'}^k$ alors $q = q'$.

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que toute forme quadratique représentée par ${}^tA \cdot A$ est définie positive.

Exercice 6. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ satisfait ${}^tA \cdot A = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 7. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que ses valeurs propres λ_i satisfont

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2.$$

Exercice 8. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ orthogonale dont l'image par f est une famille orthogonale.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, <,>)$. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ définie par : $q(x) =< u(x), x >$.

1. Montrer que q est une forme quadratique en exhibant sa forme polaire b.
2. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

   (i) Il existe une base orthonormée (pour $<,>$) formée de vecteurs isotropes (pour q).

   (ii) La trace de u est nulle.

   Indication. Pour l'implication (ii)$\Rightarrow$(i), utiliser un résultat du cours pour construire un vecteur isotrope pour q et raisonner par récurrence sur la dimension.
3. Dans cette question on suppose q définie positive.

   (a) En appliquant Cauchy-Schwarz à q, b et deux vecteurs à choisir judicieusement, montrer l'inégalité suivante, valable pour tout x de E :

   $$(*)\|u(x)\|^4 \leq \langle u(x), x\rangle\langle u^3(x), x\rangle.$$

   (b) Montrer que toutes les valeurs propres de u sont strictement positives. En utilisant cette information et en calculant les produits scalaires ci-dessus via les coordonnées de x dans une base orthonormale de diagonalisation de u, donner une autre preuve de l'inégalité $(*)$ qui appelle Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et non pour la forme q.

Exercice 10. Étant donné $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que l'endomorphisme ψ_M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\psi_M(A) = ({}^tM)AM + MA({}^tM)$ est diagonalisable. Indication. Montrer que pour toutes matrices A, B, H on a : $< HA, B > = < A, {}^tHB >$ et $< AH, B > = < A, B{}^tH >$ où $<,>$ est le produit scalaire "canonique" sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On dit que u est antisymétrique si pour tous $x, y \in E$, $< u(x), y > = - < x, u(y) >$.

1. Montrer que u est antisymétrique si et s.si l'une des assertions suivantes est vraie

   (i) Pour tout $x \in E$, $< u(x), x > = 0$.

   (ii) Étant donnée une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique.
2. Dorénavant, on suppose u antisymétrique.

   (a) Montrer que les racines du polynôme caractéristique de u sont imaginaires pures. Indication. Considérer la matrice de u dans une base quelconque comme un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, où $n = \dim E$.

   (b) Montrer que u est de rang pair.

   (c) Montrer que u^2 est diagonalisable. Soit λ une valeur propre *non nulle* de u^2 et $E(\lambda)$ l'espace propre associé.
   Montrer qu'il existe une base orthogonale de $E(\lambda)$ de la forme
   $(e_1, \ldots, e_p, u(e_1), \ldots, u(e_p))$. Indication. Montrer que si $F = \oplus_{i=1}^{q}(e_i \oplus u(e_i)) \subset E(\lambda)$ et si l'orthogonal de F est non nul et $e \in F^\perp \setminus \{0\}$ alors $u(e) \perp e$ et $u(e) \in F^\perp$.

   (d) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E pour laquelle la matrice de u est de la forme $\mathrm{Diag}(M_1, \ldots, M_d, 0, \ldots, 0)$ avec $M_i = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}_{>0}$.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien ; on notera u^* l'adjoint d'un endomorphisme u.
Soit u un endomorphisme de E vérifiant : pour tout x de E, $\|u(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que pour tous x et y de E, on a :

   $$|\langle y, u^*(x)\rangle| \leq \|x\|\|y\|;$$

en déduire qu'on a aussi pour tout x de E :

$$\|u^*(x)\| \leq \|x\|.$$

2. Pour x dans $\ker(u-\mathrm{Id})$, calculer astucieusement $\langle u^*(x)-x, u^*(x)-x\rangle$, de façon à en déduire que $\ker(u-\mathrm{Id}) \subset \ker(u^* - \mathrm{Id})$; montrer ensuite qu'on a même l'égalité : $\ker(u - \mathrm{Id}) = \ker(u^* - \mathrm{Id})$.
3. Vérifier que les sous-espaces vectoriels $\ker(u^*-\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ sont orthogonaux. En déduire que $\ker(u-\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $u^* \circ u$ sont positives, puis qu'elles sont inférieures ou égales à 1.
5. Réciproquement, soit v un endomorphisme tel que toutes les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$ soient comprises dans $[0, 1]$.

   Montrer que $v^* \circ v$ est symétrique ; en utilisant une base de diagonalisation judicieuse de cet endomorphisme symétrique, montrer que v vérifie la propriété suivante :

$$\text{pour tout } x \textit{ de } E,\ \|v(x)\| \leq \|x\|.$$