Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2023-2024

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 3

LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS VECTORIELLES

I. Limites

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{2xy - y^2}{x^2+y^2}$.

1. Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Étudier la limite pour $(x,y) \to (0,0)$ de la restriction de f aux droites d'équation $y = mx$, avec $m \in \mathbb{R}$ donné.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'equation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 3. Étudier la limite à l'origine de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 4. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes quand $(x,y) \to (0,0)$ et (x,y) appartenant à l'ensemble de définition :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}$,
2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,
3. $f_3(x,y) = \dfrac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}$,
4. $f_4(x,y) = \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}$,
5. $f_5(x,y) = \dfrac{x^2}{y\ln(y-x^2)}$,
6. $f_6(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x+y}$.

1. En passant en coordonnées polaires, déterminer une majoration simple de $|f(x,y)|$ pour (x,y) dans le domaine de définition de f.
2. Peut-on étudier à l'aide de la majoration précédente la limite de f en $(0,0)$?

Exercice 6. Calculer les limites à l'origine des fonctions suivantes à l'aide d'un passage aux coordonnées polaires.

1. $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$,
2. $f : (x,y) \longmapsto \dfrac{x^2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner les définitions des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.

Étudier ensuite les limites pour $(x,y) \to (0,0)$ et pour $\|(x,y)\| \to \infty$ de la fonction

$$f : (x,y) \longmapsto \frac{(x^2+y^2+x+y+1)^\alpha}{x^2+y^2} \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ fixé}).$$

Exercice 8. Étudier les limites lorsque $(x,y) \to (0,0)$ ainsi que $\|(x,y)\| \to +\infty$ des fonctions suivantes :

1. $(x,y) \longmapsto \dfrac{x\arctan y}{x^2+y^2+1}$,
2. $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$,
3. $(x,y) \longmapsto \big(1+|x|+|y|\big)\sin(y^2)$,
4. $f(x,y) \longmapsto y\,\mathrm{e}^x + \ln|y|$.

Exercice 9. Étudier l'existence des limites des fonctions suivantes aux points donnés et déterminer leurs valeurs si elles existent :

1. $f_1 : (x,y) \longmapsto \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,0)$.
2. $f_2 : (x,y) \longmapsto \dfrac{x^3+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2}$ en $(0,-1)$.
3. $f_3 : (x,y) \longmapsto \dfrac{(x-1)^3(y-2)-(y-2)^2(x-1)}{(x-1)^4+(y-2)^2}$ en $(1,2)$.
4. $f_4 : (x,y) \longmapsto \dfrac{x+5}{(x+5)^2+y^2}$ en $(-5,0)$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé. On considère une application $f : E \longrightarrow E$ telle que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \exists \ell \in E, \quad f(x) \underset{x \to 0_E}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que f est constante.

II. Continuité

Exercice 11. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{et} \qquad f(0,0) = 0.$$

1. Soit D une droite quelconque passant par l'origine. Montrer que la restriction de f à D est continue en $(0,0)$.
2. Peut-on en déduire que f est continue en $(0,0)$?

Exercice 12. Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ les formules suivantes définissent-elles une fonction continue ?

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.
2. $g(x,y) = \sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$.

Démontrer que ces deux fonctions se prolongent par continuité au point $(0,0)$.

Exercice 13. Soient α et β deux réels strictement positifs. Étudier la continuité de $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$
$$\text{et } f(x,y) = 0 \text{ si } (x,y) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^+ \times \{0\}.$$

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue en $(0,y_0)$ pour $y_0 > 0$ et en $(x_0,0)$ pour $x_0 > 0$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que f soit continue en $(0,0)$.

Exercice 14. Les fonctions suivantes peuvent-elles être prolongées par continuité sur les ensembles donnés ?

1. $f : (x,y,z) \longmapsto \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$ sur $\mathbb{R}^3$;
2. $g : (x,y) \longmapsto \left(\dfrac{x^2+y^2-1}{x}\sin(x), \dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Étudier la continuité des fonctions suivantes

1. $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2y & \text{si } x < y, \\ y & \text{si } x \geq y \, ; \end{cases}$
2. $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{xy}\right) & \text{si } xy \neq 0, \\ 0 & \text{si } xy = 0 \, ; \end{cases}$
3. $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} x^4 & \text{si } x^2 < y, \\ y^2 & \text{si } x^2 \geq y. \end{cases}$

Exercice 16. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \frac{1}{1+\|x\|}$$

est lipschitzienne donc continue sur E.

III. Continuité et topologie

Exercice 17. Montrer que l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < e^{\cos(y)} + 13\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que l'ensemble $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3 \leq 3\ln\left((x-z)^2+y^2+\frac{1}{2}\right) \leq 5\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 18. Soient $(E, \| \, \|_E)$ et $(F, \| \, \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f, g : E \longrightarrow F$ deux fonctions continues sur E.

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.
2. On suppose qu'il existe une partie A dense dans E sur laquelle f et g coïncident. Montrer que f et g sont égales (sur E).

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 2\}$ est ouvert et/ou fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV. Continuité et linéarité

Exercice 20. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_1$.

1. Pour $c \in [0;1]$, on définit l'application δ_c par : $\delta_c : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(c) \end{array}$.

   Montrer que δ_c est une forme linéaire sur E mais qu'elle n'est pas continue.

2. Soit $\mu : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \mu(f) \end{array}$ telle que pour tout $x \in [0;1]$, on ait $\mu(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue de E dans lui-même.

Exercice 21. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie pour $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $\|P\|_\infty = \max\limits_{0 \leq k \leq n} |a_k|$. Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire suivante :

$$\phi_c : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\cdot|) \\ P & \longmapsto & P(c) \end{array}.$$

1. On suppose dans cette question que $c \in]-1;1[$.Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $|\phi_c(P)| \leq \dfrac{1}{1-|c|}\|P\|_\infty$. En déduire que ϕ_c est continue.
2. Supposons désormais $c \geq 1$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$. Calculer $\phi_c(P_n)$.
   (b) Montrer que ϕ_c n'est pas continue
3. Montrer que ϕ_c n'est pas continue si $c \in]-\infty;-1]$.