

**Feuille d'exercices n° 4**

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

**I. Normes**

**Exercice 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Pour  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , rappeler l'expression des normes  $\|u\|_1$ ,  $\|u\|_2$  et  $\|u\|_\infty$ .
2. Justifier (sans calcul) que les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes deux à deux.
3. Déterminer les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  optimales (c'est-à-dire les plus petites possibles) telles que pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  :

$$\|u\|_1 \leq \alpha \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_\infty \leq \gamma \|u\|_1.$$

**Exercice 2.** On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad N_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto |x_1 + x_2| + |x_1| \qquad (x_1, x_2) \longmapsto \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) .$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à  $N_1$ , et par rapport à  $N_2$ .

**Exercice 3.** Les fonctions  $N$  suivantes sont-elles des normes sur les espaces considérés ?

- |  |  |
|--|--|
| 1. $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}}  f(x) .$   | 5. $N : C([0; 2\pi], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \int_0^{2\pi}  f(t) \sin t  dt.$    |
| 2. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in [0; 1]}  f(x) ^2.$         | 6. $N : C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}}  f(x) $  |
| 3. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in [0; \frac{1}{2}]}  f(x) .$ | 7. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \left  \int_0^1 f(t) dt \right .$      |
| 4. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \sup_{x \in [0; 1]}  f(x) .$           | 8. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto  x  + 2 y .$                               |
|  | 9. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \left( \sqrt{ x } + \sqrt{ y } \right)^2.$ |

où  $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4.** On note  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles bornées  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $u_0 = 0$ . On définit deux applications sur  $E$  par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que  $N$  définit une norme sur  $E$ . On admet que  $N_\infty$  définit aussi une norme sur  $E$ .
2. Montrer que :  $\forall u \in E, N(u) \leq 2N_\infty(u)$ . Déterminer une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.
3. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $u^{(p)}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(p)} = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer, à l'aide des suites  $u^{(p)}$  par exemple, que les normes  $N_\infty$  et  $N$  ne sont pas équivalentes.

**Exercice 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'application  $N_\infty$  par  $N_\infty(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ , pour toute matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $N_\infty$  définit une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et que pour tous  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$ .
2. Soit  $N$  une norme quelconque sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

## II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

**Exercice 6.** Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  des fonctions continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , on considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'applications, définies par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f_n(x) = x\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}.$$

(avec la convention  $0^x = 0$  pour tout  $x > 0$ ).

Étudier la convergence de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vers la fonction constante  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 1$ , pour les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Exercice 7.** On se place dans l'espace vectoriel  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$  et on considère  $N$  définie par :

$$N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx \text{ pour tout } f \in E.$$

1. Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ .
2. On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que  $f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$ .
  - (a) Pour un  $n \in \mathbb{N}^*$ , tracer la courbe de  $f_n$ .
  - (b) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers la fonction nulle dans  $(E, N)$ .
  - (c) Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas vers la fonction nulle dans  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .
  - (d) Les normes  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 8.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique telle que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $B$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $B$  est la matrice nulle.

**Exercice 9.** On note  $E = \mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et on considère une suite de réels  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On définit deux applications  $N$  et  $N'$  sur  $E$  par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E, \quad N(P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k |a_k| \quad \text{et} \quad N'(P) = \max_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} |a_k|.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite  $(\alpha_n)_n$  pour que  $N$  définisse une norme sur  $E$ .  
On admet que  $N'$  définit une norme sur  $E$ .
2. Dans cette question, on suppose que la suite  $(\alpha_n)_n$  est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n = X^n$ . Étudier la convergence de la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $N$ .
3. (\*) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $Q_n = 1 + X + \dots + X^n$ . Étudier la convergence de la suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $N'$ .

**Pour s'entraîner :**

**Exercice 10.** On définit l'application  $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, N(u) = \frac{1}{2} \max(|x + y|, |x - y|).$$

1. (a) Montrer que l'application  $N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Dessiner sa boule unité fermée.
2. Pour  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^2$ , on note  $S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2}, r)$  la sphère de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $0_{\mathbb{R}^2}$  et de rayon  $r$ .  
(a) Montrer que pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^2$ , on a pour tout  $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$  :

$$\frac{u}{\|u\|} \in S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2}, 1).$$

- (b) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que si les sphères  $S_{N_1}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$  et  $S_{N_2}(0_{\mathbb{R}^2}, \alpha)$  sont égales, alors il existe  $k \in \mathbb{R}$ , que l'on explicitera, tel que  $N_1(u) = kN_2(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ .
- (c) En justifiant à l'aide du dessin, en déduire qu'il existe  $\beta \in \mathbb{R}$ , que l'on explicitera, tel que  $N(u) = \beta(|x| + |y|)$  pour tout  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
3. On cherche maintenant à retrouver le résultat précédent par le calcul.  
(a) Montrer que  $N(x, y) = N(y, x) = N(-x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
(b) En déduire que  $N(x, y) = N(|x|, |y|)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
(c) Retrouver ainsi le résultat de la question 2c.

**Exercice 11.** Pour tout  $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ , on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0; 1]} |f(t)|.$$

1. En adaptant un peu l'exercice précédent, on sait que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $C([0; 1], \mathbb{R})$ . Montrer que  $\|\cdot\|_2$  définit aussi une norme sur  $C([0; 1], \mathbb{R})$ .
2. Montrer que pour tout  $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$ , on a  $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ , mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

*Indication : on pourra considérer les fonctions  $f_n : x \mapsto x^n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*