

Feuille d'exercices n° 4

ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX ET ESPACES ORIENTÉS

I. Endomorphismes orthogonaux

Exercice 1. On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $(2, 2)$. Le but de l'exercice est d'expliciter les matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
 - (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c) .
 - (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
 - (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.
 - (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P)(X) = P(-X)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme orthogonal.
2. Déterminer la nature géométrique de u .

Exercice 3. Soient $n \geq 2$ et a, b deux réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = aM + b^t M.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que l'endomorphisme f soit un endomorphisme orthogonal.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien non nul et u un endomorphisme orthogonal de E diagonalisable. Montrer que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application de E dans E vérifiant

$$f(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. En introduisant une base orthonormée de E , montrer que f est un endomorphisme orthogonal.

II. Espaces orientés

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 et u et v deux vecteurs non nuls de E .

1. Notons θ la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$. Montrer que $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos(\theta)$ et $\det(u, v) = \|u\|\|v\| \sin(\theta)$ (où le déterminant est pris dans une base orthonormée directe).
2. Soit f un endomorphisme orthogonal de E .
 - (a) On suppose que f est direct. Montrer que $\widehat{(f(u), f(v))} \equiv \widehat{(u, v)} \pmod{2\pi}$.
 - (b) On suppose que f est indirect. Montrer que $\widehat{(f(u), f(v))} \equiv -\widehat{(u, v)} \pmod{2\pi}$.

Exercice 7.

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel et on l'oriente par sa base canonique. Déterminer une mesure de l'angle orienté du vecteur $u = (1, 0)$ au vecteur $v = (1, -2)$.

2. On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2x_2 y_2.$$

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
- Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire. Dans la suite, on considérera que cette base est directe.
- Dans le plan euclidien orienté $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, déterminer une mesure de l'angle orienté de u à v .

Exercice 8. Soit E un plan euclidien orienté. On se donne une rotation r de E et une réflexion s de E . Préciser la nature des endomorphismes $r \circ s$ et $s \circ r$ puis expliciter les composées $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

- Déterminer l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E en fonction de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
- Soient u, v deux vecteurs normés orthogonaux de E et $w \in E$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w = \pm u \wedge v$. À quelle condition cette base est-elle directe ?
- Application : Déterminer toutes les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.
- Démontrer la formule du double produit vectoriel :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

- Montrer que, pour tout $(u, v) \in E^2$, $\langle u, v \rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.
- Soient $a, b, c \in E$ non nuls. On note $a' = b \wedge c$, $b' = c \wedge a$, $c' = a \wedge b$ et $v = \|a\|a' + \|b\|b' + \|c\|c'$. On suppose que $v \neq 0$. Montrer que :

$$\cos(\widehat{v, a}) = \cos(\widehat{v, b}) = \cos(\widehat{v, c}).$$

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

- Soient w un vecteur unitaire de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation r d'angle θ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur w .
 - Soit $x \in E$ un vecteur orthogonal à w . Montrer que

$$r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)w \wedge x.$$

- On suppose désormais que x est un vecteur unitaire orthogonal à w . Montrer que

$$\cos(\theta) = \langle x, r(x) \rangle \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x, r(x), w] = [w, x, r(x)]$$

où $[a, b, c]$ désigne le produit mixte des vecteurs $a, b, c \in E$.

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $w = (1, 1, 0)$.
- Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 11. Soient a et b deux réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

- Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
- Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Exercice 12. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \frac{1}{10\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -9\sqrt{2} & -6 \\ -9\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 6 \\ 6 & -6 & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Trouver toutes les matrices orthogonales de la forme

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & a & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour une telle matrice orthogonale M_a , on note f_a l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M_a . Préciser les éléments caractéristiques de f_a .

Pour aller plus loin :

Exercice 14. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et f un endomorphisme de E . Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \iff f \text{ est une rotation ou } f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Supposons que f est une rotation.

- (a) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $[f(x), f(y), f(z)] = [x, y, z]$ (où $[]$ désigne le produit mixte).
- (b) Pour $(x, y, z) \in E^3$, simplifier $\langle f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y), z \rangle$.
- (c) Conclure.

2. Supposons désormais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et vérifie : $\forall (x, y) \in E^2, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

- (a) Montrer que f est injective.
- (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E . Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormée directe de E .
- (c) Conclure.

3. Deuxième méthode pour le sens direct : supposons que $\forall (x, y) \in E^2, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

- (a) Simplifier $\langle f(x) \wedge f(y), f(z) \rangle$ pour $(x, y, z) \in E^3$.
- (b) Montrer que pour tout $w \in E$, il existe $x, y \in E$ tels que $w = x \wedge y$.
- (c) En déduire que $f^* \circ f = \det(f) \text{Id}$.
- (d) Démontrer qu'alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou f est une rotation.