Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2024-2025

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 4

ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX ET ESPACES ORIENTÉS

I. Endomorphismes orthogonaux

Exercice 1. On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $(2, 2)$. Le but de l'exercice est d'expliciter les matrices de $O_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $c = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).
   (c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :
   $$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
2. En déduire que $O_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
3. Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Montrer que R_θ et $R_{\theta'}$ commutent. Les élements de $O_2(\mathbb{R})$ commutent-ils entre eux ?
4. On se place dans un plan euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 2. On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P)(X) = P(-X)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme orthogonal.
2. Déterminer la nature géométrique de u.

Exercice 3. Soient $n \geq 2$ et a, b deux réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = aM + b^tM.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que l'endomorphisme f soit un endomorphisme orthogonal.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien non nul et u un endomorphisme orthogonal de E diagonalisable. Montrer que u est une symétrie orthogonale.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f une application de E dans E vérifiant

$$f(0_E) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. En introduisant une base orthonormée de E, montrer que f est un endomorphisme orthogonal.

II. Espaces orientés

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 et u et v deux vecteurs non nuls de E.

1. Notons θ la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(u, v)}$. Montrer que $\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos(\theta)$ et $\det(u, v) = \|u\|\|v\| \sin(\theta)$ (où le déterminant est pris dans une base orthonormée directe).
2. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.
   (a) On suppose que f est direct. Montrer que $\widehat{(f(u), f(v))} \equiv \widehat{(u, v)} \quad [2\pi]$.
   (b) On suppose que f est indirect. Montrer que $\widehat{(f(u), f(v))} \equiv -\widehat{(u, v)} \quad [2\pi]$.
   (c) Application : Soit (ABC) un triangle isocèle en A (*i.e.* tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$). Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \quad [2\pi]$.

Exercice 7. Soit E un plan euclidien orienté. On se donne une rotation r de E et une réflexion s de E. Préciser la nature des endomorphismes $r \circ s$ et $s \circ r$ puis expliciter les composées $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E en fonction de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
2. Soient u, v deux vecteurs normés orthogonaux de E et $w \in E$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w = \pm u \wedge v$. À quelle condition cette base est-elle directe ?
3. Application : Déterminer toutes les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$.
4. Démontrer la formule du double produit vectoriel :
$$\forall (u, v, w) \in E^3, \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$
5. Montrer que, pour tout $(u, v) \in E^2$, $\langle u, v\rangle^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.
6. Soient $a, b, c \in E$ non nuls. On note $a' = b \wedge c$, $b' = c \wedge a$, $c' = a \wedge b$ et $v = \|a\|a' + \|b\|b' + \|c\|c'$. On suppose que $v \neq 0$. Montrer que :
$$\cos\widehat{(v, a)} = \cos\widehat{(v, b)} = \cos\widehat{(v, c)}.$$

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

1. Soient w un vecteur unitaire de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation r d'angle θ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur w.
   (a) Soit $x \in E$ un vecteur orthogonal à w. Montrer que
   $$r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)w \wedge x.$$
   (b) On suppose désormais que x est un vecteur unitaire orthogonal à w. Montrer que
   $$\cos(\theta) = \langle x, r(x)\rangle \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x, r(x), w] = [w, x, r(x)]$$
   où $[a, b, c]$ désigne le produit mixte des vecteurs $a, b, c \in E$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $w = (1, 1, 0)$.
3. Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est
$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$
Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 10. Soient a et b deux réels. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quels $a, b \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?
2. Dans ce cas, préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

Exercice 11. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$M = \frac{1}{10\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -9\sqrt{2} & -6 \\ -9\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 6 \\ 6 & -6 & 8\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Trouver toutes les matrices orthogonales de la forme
$$M_a = \begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ a & a & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour une telle matrice orthogonale M_a, on note f_a l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est M_a. Préciser les éléments caractéristiques de f_a.

Pour aller plus loin :

Exercice 13. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \iff f \text{ est une rotation ou } f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Supposons que f est une rotation.
   (a) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $[f(x), f(y), f(z)] = [x,y,z]$ (où $[\,]$ désigne le produit mixte).
   (b) Pour $(x,y,z) \in E^3$, simplifier $\langle f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y), z \rangle$.
   (c) Conclure.
2. Supposons désormais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et vérifie : $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormée directe de E.
   (c) Conclure.
3. Deuxième méthode pour le sens direct : supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Simplifier $\langle f(x) \wedge f(y), f(z) \rangle$ pour $(x,y,z) \in E^3$.
   (b) Montrer que pour tout $w \in E$, il existe $x, y \in E$ tels que $w = x \wedge y$.
   (c) En déduire que $f^\star \circ f = \det(f)\mathrm{Id}$.
   (d) Démontrer qu'alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou f est une rotation.