

**Feuille d'exercices n° 4**

ENDOMORPHISMES D'UN ESPACE EUCLIDIEN : ADJOINTS ET THÉORÈME SPECTRAL

**I. Manipulations de l'adjoint**

**Exercice 1.** Soit  $v$  un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\text{Ker}(v^*) = (\text{Im}v)^\perp \quad \text{et} \quad \text{Im}(v^*) = (\text{Ker}v)^\perp.$$

**Exercice 2.** Soit  $E$  un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est non-expansif lorsque pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\| \leq \|x\|$ . Soit  $u$  un endomorphisme non expansif de  $E$ .

1. Montrer que pour tous  $x, y \in E$ , on a  $|\langle y, u^*(x) \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .
2. En déduire que  $u^*$  est lui-aussi non expansif.
3. Montrer l'inclusion  $\text{Ker}(u - \text{Id}) \subset \text{Ker}(u^* - \text{Id})$ .

*Indication : on pourra partir d'un élément  $x \in \text{Ker}(u - \text{Id})$  et chercher à démontrer que  $\|u^*(x) - x\| = 0$ .*

4. Montrer que  $\text{Ker}(u - \text{Id})$  et  $\text{Im}(u - \text{Id})$  sont supplémentaires orthogonaux.
5. Quels sont les endomorphismes non-expansifs dont la décomposition de Dunford est de la forme  $\text{Id} + n$  avec  $n$  nilpotent ?

**II. Utilisation du théorème spectral**

**Exercice 3.** Soit  $A$  une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier  $k \geq 2$  tel que  $A^k = I$  (où  $I$  désigne la matrice identité).

1. Montrer que  $A^2 = I$  puis que  $A$  est orthogonale ?
2. Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est  $A$  dans une base orthonormée ?

**Exercice 4.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que sur l'ensemble des matrices symétriques positives, l'application  $A \mapsto A^k$  est injective.
2. L'est-elle sur l'espace des matrices symétriques ?

**Exercice 5.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est symétrique.

### III. Application à la réduction des formes quadratiques

**Exercice 6.** Soit  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

étudiée dans la fiche précédente. Utiliser les calculs précédents pour déterminer une base  $q$ -orthogonale.

**Exercice 7.** Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $q_1, q_2$  deux formes quadratiques sur  $E$ . On suppose que  $q_1$  est définie positive. Montrer qu'il existe une base orthogonale à la fois pour  $q_1$  et  $q_2$ .

### IV. Intervention de $u^* \circ u$ ou de ${}^tAA$

**Exercice 8.** Soit  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Démontrer les équivalences suivantes.

1.  $B$  est symétrique positives si et seulement si il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = {}^tAA$ ,
2.  $B$  est symétrique définie positive si et seulement si il existe  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $N = {}^tAA$ .

**Exercice 9.** Soit  $A = (a_{i,j})_{i,j \in [1;n]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  énumérées avec multiplicité. Montrer l'identité

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2.$$

**Exercice 10.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ .

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  qui diagonalise  $u^* \circ u$ .
2. Montrer que la famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est orthogonale.
3. On suppose dans cette question que  $u$  est bijectif. Montrer que la famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est une base orthogonale de  $E$  puis déterminer une base orthonormée de  $E$ .
4. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux matrices  $U$  et  $V$  telles que  $UMV$  est diagonale.

*Indication : on pensera à utiliser la formule de changement de bases (pour des bases différentes au départ ainsi qu'à l'arrivée).*

5. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  non inversible.
  - (a) On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dont  $M$  est la matrice dans la base canonique. La famille trouvée à la question 2 est-elle une base ?
  - (b) Construire à l'aide de cette famille une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  adaptée à la décomposition  $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus (\text{Im}(f))^\perp$ .
  - (c) Montrer que le résultat de la question 4 est encore vrai.

**Exercice 11.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que  $u$  est non-expansif si et seulement si toutes les valeurs propres de  $u^* \circ u$  sont dans  $[0; 1]$ .