---

**Feuille d'exercices n° 3**
Ensembles et applications

---

## Ensembles

**Exercice 1.**

1. On note $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1, 3]$ et $B = ]2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $[3, 8[\cap \mathbf{Z}$, $[-3, 2[\cap \mathbf{N}$ et $]0, 1[\cap \mathbf{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbf{R}$ des parties $]-\infty, 0]$ et $[1, 2[$.
5. Déterminer $]-2, 3] \setminus \mathbf{Z}$, $]-2, 3] \setminus [0, 4]$ et $]-2, 3] \setminus [-4, 4]$.

**Exercice 2.**

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs en extension puis en compréhension.
2. Écrire les ensembles suivants en extension.
   (a) $\{ \ n \in \mathbf{N} \mid n \leq 2 \ \}$ ;
   (b) $\{ \ n \in \mathbf{N} \mid n < 1 \ \}$ ;
   (c) $\{ \ n \in \mathbf{N} \mid n \leq 1 \text{ et } n \text{ est divisible par } 2 \ \}$ ;
   (d) $\{ \ n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ n \leq m \ \}$ ;
   (e) $\{ \ n \in \mathbf{N} \mid \forall m \in \mathbf{N},\ n < m \ \}$ ;
   (f) $\{ \ n \in \mathbf{N} \mid n \text{ divise } 12 \text{ ou } n \geq 7 \ \}$ ;
   (g) $\{ \ n \in \mathbf{N} \mid n \text{ ne divise pas } 12 \text{ et } n \leq 7 \ \}$.

**Exercice 3.** Décider si les ensembles suivants sont vides.

1. $\left\{ \ x \in \mathbf{R} \ \middle| \ x^2 - 3x \geq 2 \ \right\}$ ;
2. $\left\{ \ x \in \mathbf{R}_- \ \middle| \ \dfrac{x+1}{2x-1} > 4 \ \right\}$ ;
3. $\left\{ \ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ \middle| \ x^2 - 3xy + 4y^2 = -1 \ \right\}$ ;
4. $\left\{ \ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ \middle| \ x^2 - 3xy + 4y^2 = 4 \ \right\}$ ;
5. $\{ \ (x, y) \in [0, 5] \times [0, 3] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0 \ \}$.

**Exercice 4.** Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leq b$. Montrer que

$$[a, b] \ = \ \{ \ t\,a + (1-t)\,b \mid t \in [0, 1] \ \} \ = \ \left\{ \ (1-t')\,a + t'\,b \ \middle| \ t' \in [0, 1] \ \right\} \ .$$

**Exercice 5.** Soit $E$ un ensemble et $(A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$ ;
   (b) $A \cap B = A$ ;
   (c) $A \cup B = B$ ;
   (d) $A \setminus B = \emptyset$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \cup B = A \cap C$ ;
   (b) $B \subset A \subset C$.
3. Montrer l'implication

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C\ .$$

## Applications

**Exercice 6.** Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales.

1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x^2+2x+1)(x-1)$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (x+1)(x^2-1)$ ;
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ ;
3. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x+1$ et $g : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ ;
4. $f : \{\, x \in \mathbf{R} \mid |x-2| < \frac{1}{2}|x+3| \,\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 0$ et $g : ]\frac{1}{3}, 7[ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 0$ ;
5. $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$.

**Exercice 7.** Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

1. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ ;
2. $[\pi, 2\pi] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin(x)$ ;
3. $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ ;
4. $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$ ;
5. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$ ;
6. $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$ ;
7. $\{0,1,2,3\} \to \{1,7,9,11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ ;
8. $\{0,1,2\} \to \{-1,0,1\}$, $x \mapsto -(x-1)$ ;
9. $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $f \mapsto f(0)$.

**Exercice 8.**

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \{0\}$. Montrer que $f$ est surjective mais pas injective.
2. Soit $E$ un ensemble, $n \in \mathbf{N}^\star$, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $f : \{\, x_i \mid i \in [\![1, n]\!] \,\} \to \mathbf{R}$.
   Montrer que $f$ n'est pas surjective.

**Exercice 9.** Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que $f$ est injective et que $g$ l'est aussi si $f$ est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que $g$ est surjective et que $f$ l'est aussi si $g$ est injective.

**Exercice 10.** Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que $f$ est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
3. On considère maintenant $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, $x \mapsto (\max(x, 0), \max(-x, 0))$.
   (a) Montrer que $f$ est injective et donner $g : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}}$.
   (b) Quelle est l'image de $f$ ?

**Exercice 11.** Soit $E$ un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Étudier la surjectivité de $f$ en considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

**Exercice 12.** Soit $f$ l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

**Exercice 13.** Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$ ;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$ ;
3. $\cos^{-1}([0, 1])$ ;
4. $\left(\cos_{\mid [3,7]}\right)^{-1}([0, 1])$ ;
5. $\left(\cos_{\mid [0,\pi]}\right)^{-1}([0, 1])$ ;
6. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f ; \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ ;
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ ;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ ;
9. $\sqrt{\cdot}\,([0, 1])$ ;
10. $f^{-1}([-1, 1[ \cup \{2\})$ et $f([0, 1]^3)$ pour $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$ ;
11. $|\cdot|([-2, -1] \cup [2, 4[)$ ;
12. $\left(|\cdot|_{\mid [-8,7]}\right)^{-1}([2, 3])$ ;
13. $|\cdot|^{-1}(\{1\})$.

**Exercice 14.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit $B \subset F$.
   (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
   (b) À quelle condition a-t-on $f(f^{-1}(B)) = B$ ?
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Soit $A \subset E$.
   (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Que peut-on dire si $f_{|\, f^{-1}(f(A))}$ est injective ?
4. Montrer que $f$ est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

**Exercice 15.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit $I$ un ensemble et $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \ .$$
2. Montrer que $f$ est injective si et seulement si, pour tout ensemble $I$ non vide et toute famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$, on a
$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i) \ .$$
3. Soit $I$ un ensemble et $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \ .$$