Feuille d'exercices n^o 3

Diagonalisation - Polynôme caractéristique et minimal

1 Diagonalisation et polynôme caractéristique

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\ker((u-\lambda \mathrm{Id})^k) \subseteq \ker((u-\lambda \mathrm{Id})^{k+1})$.
   (b) Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ker((u-\lambda \mathrm{Id})^{k_0}) = \ker((u-\lambda \mathrm{Id})^{k_0+1})$.
   (c) Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker((u-\lambda \mathrm{Id})^k) = \ker((u-\lambda \mathrm{Id})^{k+1})\}$. Montrer que pour tout entier $k \geq k_0$, $\ker((u-\lambda \mathrm{Id})^k) = \ker((u-\lambda \mathrm{Id})^{k+1})$.
2. On suppose que P_u est scindé et s'écrit $P_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$ avec $m_i \in \mathbb{N}^*$. De plus, écrivons le polynôme minimal de u : $m_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\mu_i}$ (on admet que $\mu_i > 0$).
   (a) Justifier les égalités suivantes.
   $$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{i=1}^{p} \ker((u-\lambda_i \mathrm{Id})^{m_i}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{p} \ker((u-\lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_i}) \end{aligned}$$
   On note $F_{\lambda_i} = \ker((u-\lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_i})$ et on l'appelle espace caractéristique associé à λ_i.
   (b) En déduire que pour tout $i = 1, \dots, p$, $\ker((u-\lambda_i \mathrm{Id})^{\mu_i}) = \ker((u-\lambda_i \mathrm{Id})^{m_i})$.
   (c) Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
      i. u est diagonalisable.
      ii. Pour tout $i = 1, \dots, p$, $\ker(u-\lambda_i \mathrm{Id}) = \ker((u-\lambda_i \mathrm{Id})^2)$.
      iii. Pour tout $i = 1, \dots, p$, $E_{\lambda_i} = F_{\lambda_i}$.
      iv. Pour tout $i = 1, \dots, p$, $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

Exercice 2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de u.
2. Sans calcul, justifier qu'il existe une base de $\mathbb{C}^3$ constituée de vecteurs propres. En déterminer une.
3. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{Q}^3$) déterminer par M est-il diagonalisable ?

Exercice 3. Diagonaliser ou trigonaliser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, en donnant une matrice de passage, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Discuter en fonction de a, b, c et d la possibilité de diagonaliser les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par

$$u(P) = (X^2 - 1)P'' + 3XP'.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$.

1. Montrer qu'il existe une valeur propre λ de u telle que $\mathrm{tr}(u) = \lambda$.
2. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(u) \neq 0$.

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme nilpotent de E.

1. Sans utiliser le polynôme minimal, montrer que le polynôme caractéristique de u est $P_u = (-1)^n X^n$. Comment procéder à l'aide du polynôme minimal ?
2. Par récurrence, montrer qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
3. Inversement, montrer que tout endomorphisme de E dont la matrice dans une certaine base B est triangulaire avec une diagonale nulle, est nilpotente de degré $p \leq n$.

On rappelle que le degré de nilpotence de u est le plus petit entier p tel que $u^p = 0$ et $u^{p+1} \neq 0$.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
2. Montrer que u et v sont diagonalisables si et seulement s'il existe une base commune de diagonalisation.

Soient u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ représentés respectivement dans la base canonique par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que u et v commutent.
4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u et v.

5. Déterminer deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ invariant par u et v dont l'un est de dimension 1 et l'autre de dimension 2.
6. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ trigonalisant u et v.

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et Q un sous-ensemble de $\mathrm{End}(E)$ tel que les seuls sous-espaces stables pour tous les éléments de Q sont $\{0\}$ et E.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{End}(E)$ commutant avec tout élément de Q, il existe une valeur propre dont le sous-espace propre est E.
2. En déduire que les seuls endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de Q sont les homothéties.
3. Dans le cas où est E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, montrer que le résultat précédent est faux via un contre-exemple.
4. Montrer que le résultat est cependant vrai si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire.

2 Polynôme minimal

Exercice 10. Soit $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$. Montrer que u est linéaire. Déterminer u^2 et en déduire que u est diagonalisable.

Exercice 11.

1. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer J^p pour tout $p = 1, \ldots, n$.
   (b) En déduire que J est diagonalisable.
   (c) Montrer que $\mathrm{Id}, J, \ldots, J^{n-1}$ sont linéairement indépendants.
   (d) Déterminer le polynôme minimal de J.
   (e) Calculer les valeurs propres de J.
   (f) Diagonaliser J en exhibant une matrice de passage.

2. Soit A la matrice circulante complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Exprimer A comme polynôme en la matrice J.

(b) Montrer que pour tout polynôme complexe Q, $Q(J)$ est diagonalisable et l'ensemble de ses valeurs propres est $\{Q(\lambda) \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } J\}$.

(c) En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

(d) Calculer le déterminant de A.

Exercice 12. Soit u un endomorphisme inversible d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E où l'on suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que 0 ne peut pas être valeur propre de u.
2. En déduire que u^{-1} est un polynôme en u.

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que P est premier avec le polynôme minimal m_u de u si et seulement si l'endomorphisme $P(u)$ est inversible.

Exercice 14. Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que la restriction de u à F (considérée comme endomorphisme de F) est diagonalisable.

Exercice 15. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E stables par u tels que $E = F \oplus G$. Notons m_F et m_G les polynômes minimaux respectifs des restrictions de u à F et G. Montrer que le polynôme minimal de u est égal à $\mathrm{ppcm}(m_F, m_G)$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^3 = X$.

Exercice 17. L'objectif est de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$(\star) \qquad X^3 + X = 0.$$

Soit A non nulle satisfaisant $(\star)$.

1. Montrer que
$$\mathbb{R}^3 = \ker(A) \oplus \ker(A + \mathrm{Id}_3).$$
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Montrer que si $x \in R^3$ n'appartient pas au noyau de A alors $(x, A \cdot x)$ est libre.
4. Montrer que $\ker(A)$ est de dimension 1. En déduire que A est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$