

Feuille d'exercices n° 3

SÉRIES NUMÉRIQUES

I. Quelques séries simples

Exercice 1. Justifier l'existence des sommes suivantes et les calculer :

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad 2. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ pour } x \in \mathbb{R}, \quad 3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Pour la 2ème (resp. 3ème), on appliquera la formule de Taylor-Lagrange à l'exponentielle (resp. la fonction $t \mapsto -\ln(1+t)$) entre 0 et x (resp. 1).

Exercice 2. Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants et calculer leur somme en cas de convergence :

$$u_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}, \quad v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad w_n = e^{-n} \quad \text{et} \quad x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

II. Séries à termes positifs

Exercice 3. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} 1. \quad & (a) \ u_n = \frac{n+1}{n^3-7}, & (c) \ u_n = \frac{n+1}{n-7}, & (e) \ u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+5^n}, \\ & (b) \ u_n = \frac{n+1}{n^2-7}, & (d) \ u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), & (f) \ u_n = \frac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}, \\ 2. \quad & (a) \ u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}, & (c) \ u_n = \frac{n}{2^n}, \\ & (b) \ u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}, & (d) \ u_n = \frac{n^{100\,000}}{2^n}, \\ 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a) \ u_n = \frac{1}{n!}, & (c) \ u_n = \frac{2^n}{n!}, \\ & (b) \ u_n = \frac{n^{100\,000}}{n!}, & (d) \ u_n = \frac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n-1)!}, \\ 4. \quad & (a) \ u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, & (b) \ u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, & (c) \ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}. \end{aligned}$$

Exercice 4.

- Montrer que pour $a > 1$, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ est convergente.
- On pose $u_n = \frac{1}{n \ln^3(n)}$ pour $n \geq 2$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
- Donner un équivalent de R_n , le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 5. Déterminer la nature et la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$.

Exercice 6. Cas limite de la règle de d'Alembert

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

- Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ lorsque $a \neq e$.
- Lorsque $a = e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 7. On note, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \sum_{k=2}^n (\ln k)^2$.

- Soit $n \geq 2$. Encadrer u_n à l'aide de deux intégrales et en déduire un équivalent de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{u_n}$.

Exercice 8.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n}2^{-n}$, et $v_n = u_n - u_{n+1}$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha v_n$.
- Trouver un équivalent simple de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k}2^{-k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

III. Séries à termes quelconques

Exercice 9. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. (a) $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$, (c) $u_n = na^{n-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$,
- (b) $u_n = \frac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{C}$,
2. (a) $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$, (c) $u_n = (-1)^n (\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.
- (b) $u_n = \sin\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$,

Exercice 10. Une erreur classique

1. Montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 11. Étudier la convergence de la série de termes généraux suivants :

1. $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$, 3. $w_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.
2. $v_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

Exercice 12. Les séries suivantes sont-elles convergentes ? absolument convergentes ?

1. $\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{5/4}}\right)$,
2. $\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n}\right)$,
3. $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right)\right)$.

Exercice 13. Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!}$.

Exercice 14. Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}$.

Exercices d'entraînement avec des paramètres

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la série de terme général u_n soit convergente où

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + a}\right)$$

Exercice 16. Soient a un complexe non nul et b un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}.$$

1. Déterminer, selon les valeurs de b , un équivalent de $2^{\sqrt{n}} + b^n$.
2. Donner, selon les valeurs de a et b , la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Pour aller plus loin :

Exercice 17. (Développement asymptotique de H_n)

1. Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent du reste de la série convergente $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ la n -ième somme partielle de la série harmonique.
 - (a) Montrer l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.
 - (b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite, $\gamma > 0$.
 - (c) On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $t_n = u_n - \gamma$. Montrer l'équivalent $t_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. Indication : on pourra commencer par chercher un équivalent de $t_{n+1} - t_n$.
 - (d) On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $w_n = u_n - \gamma - \frac{1}{2n}$. Montrer l'équivalent $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.
 - (e) En déduire un développement asymptotique à quatre termes de H_n .