Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Mathématiques III PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 3

Séries numériques

I. Quelques séries simples

Exercice 1. Justifier l'existence des sommes suivantes et les calculer :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, 2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ pour $x\in\mathbb{R}$, 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Pour la 2ème (resp. 3ème), on appliquera la formule de Taylor-Lagrange à l'exponentielle (resp. la fonction $t\longmapsto -\ln(1+t)$) entre 0 et x (resp. 1).

Exercice 2. Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants et calculer leur somme en cas de convergence :

$$u_n=\frac{n^2}{n^2+1},\quad v_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right),\quad w_n=e^{-n}\quad \text{et}\quad x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

II. Séries à termes positifs

Exercice 3. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. (a) $u_n=\dfrac{n+1}{n^3-7}$, (c) $u_n=\dfrac{n+1}{n-7}$, (e) $u_n=\dfrac{2^n+3^n}{n^2+5^n}$,
   (b) $u_n=\dfrac{n+1}{n^2-7}$, (d) $u_n=\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, (f) $u_n=\dfrac{1}{n^{(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}}$,
2. (a) $u_n=\dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$, (c) $u_n=\dfrac{n}{2^n}$,
   (b) $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$, (d) $u_n=\dfrac{n^{100\,000}}{2^n}$,
3. (a) $u_n=\dfrac{1}{n!}$, (c) $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$,
   (b) $u_n=\dfrac{n^{100\,000}}{n!}$, (d) $u_n=\dfrac{4^{n+1}(n+1)!^2}{(2n-1)!}$,
4. (a) $u_n=\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$, (b) $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, (c) $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour $a>1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^3(x)}$ est convergente.
2. On pose $u_n=\dfrac{1}{n\ln^3(n)}$ pour $n\geq 2$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
3. Donner un équivalent de R_n, le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$, lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 5. Déterminer la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$.

Exercice 6. Cas limite de la règle de d'Alembert
Soit $a>0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n=\dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ lorsque $a\neq e$.
2. Lorsque $a=e$, prouver que, pour n assez grand, $u_{n+1}/u_n\geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 7. On note, pour tout $n\geq 2$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2$.

1. Soit $n\geq 2$. Encadrer u_n à l'aide de deux intégrales et en déduire un équivalent de u_n lorsque $n\to+\infty$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 8.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\sqrt{n}2^{-n}$, et $v_n=u_n-u_{n+1}$. Montrer qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\alpha v_n$.
2. Trouver un équivalent simple de $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\sqrt{k}2^{-k}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

III. Séries à termes quelconques

Exercice 9. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. (a) $u_n = (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$,
   (b) $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{C}$,
   (c) $u_n = na^{n-1}$ avec $a \in \mathbb{C}$,
2. (a) $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{\ln(n+1)}$,
   (b) $u_n = \sin\left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$,
   (c) $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$.

Exercice 10. Une erreur classique

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 11. Étudier la convergence de la série de termes généraux suivants :

1. $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$,
2. $v_n = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
3. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 12. Les séries suivantes sont-elles convergentes ? absolument convergentes ?

1. $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{\sin(2n)}{n^{5/4}}\right)$,
2. $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1 - n^{(n-3/4)}}{n^n}\right)$,
3. $\displaystyle\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right)\right)$.

Exercice 13. Justifier l'existence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k!}$.

Exercice 14. Justifier l'existence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,2^{n-k}}$.

Exercices d'entraînement avec des paramètres

Exercice 15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la série de terme général u_n soit convergente où

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

Exercice 16. Soient a un complexe non nul et b un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}.$$

1. Déterminer, selon les valeurs de b, un équivalent de $2^{\sqrt{n}} + b^n$.
2. Donner, selon les valeurs de a et b, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Pour aller plus loin :

Exercice 17. (Développement asymptotique de H_n)

1. Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent du reste de la série convergente $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la n-ième somme partielle de la série harmonique.
   (a) Montrer l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.
   (b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ les suites définies par $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers la même limite, $\gamma > 0$.
   (c) On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $t_n = u_n - \gamma$. Montrer l'équivalent $t_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$. *Indication : on pourra commencer par chercher un équivalent de $t_{n+1} - t_n$.*
   (d) On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $w_n = u_n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$. Montrer l'équivalent $w_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.
   (e) En déduire un développement asymptotique à quatre termes de H_n.