Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Maths III PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 3 : Sommes directes – Espaces stables

I. Sommes directes

Exercice 1. Trouver trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 de $\mathbb{R}^3$ (deux de dimension 1 et un de dimension 2 par exemple) tels que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

1. $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour $i \neq j$,
2. $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2 + F_3$,
3. $\mathbb{R}^3$ n'est pas la somme directe des F_i.

Exercice 2. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soient $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_p$ des familles génératrices respectives de $F_1, \dots, F_p$. Montrer que la réunion des $\mathcal{G}_i$ est une famille génératrice de $F_1 + \cdots + F_p$.
2. Montrer que les F_i sont en somme directe si et seulement si pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ de $F_1, \dots, F_p$ respectivement, la famille $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est libre.
3. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si pour toutes bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ de $F_1, \dots, F_p$ respectivement, la famille $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E.
4. Montrer que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si et seulement si $E = F_1 + \cdots + F_p$ et $\dim E = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$.

II. Sous-espaces stables

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $e = (1, 0, 1)$, $f = (1, 1, 1)$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $u(e)$, $u(f)$ et $u^2(f)$.
2. On note $E = \mathrm{Vect}(e)$ et $F = \mathrm{Vect}(f, u(f))$. Montrer que E et F sont stables par u. Expliciter la matrice de l'endomorphisme induit u_E dans la base (e) de E puis celle de u_F dans la base $(f, u(f))$ de F. Les sous-espaces E et F sont-ils supplémentaires ? La famille $(e, f, u(f))$ constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. (a) Pour x, y et z réels, quelle est l'image par u du vecteur $xe + yf + zu(f)$?
   (b) En déduire que E est la seule droite stable par u.
   (c) Soit P un plan stable par u. Montrer que $F \cap P$ est stable par u, et en déduire que $P = F$.
   (d) Quels sont les sous-espaces stables par u ?

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $x \in E$ non nul. Montrer que $D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Exercice 5.

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent et soit a, b et c trois nombres complexes. Montrer que $\mathrm{Ker}(au^2 + bu + c\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(au^2 + bu + c\,\mathrm{Id})$ sont stables par u et par v.
2. Donner un exemple d'un espace vectoriel E, de deux endomorphismes u et v qui commutent et d'un sous-espace F de E qui soit stable par u mais ne soit pas stable par v.

Exercice 6. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout polynôme P.

1. Soit $S \subset \mathbb{R}[X]$ un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ stable par D et non réduit à $\{0\}$.
   (a) Soit P un élément non nul de S, de degré d. En considérant la famille $(P, P', P'', \dots, P^{(d)})$, montrer que $\mathbb{R}_d[X] \subset S$.

(b) On suppose l'ensemble $\{\deg P \mid P \in S\}$ majoré, et on note $d = \max\{\deg P \mid P \in S\}$. Montrer que $S = \mathbb{R}_d[X]$.

(c) On suppose l'ensemble $\{\deg P \mid P \in S\}$ non majoré. Montrer que $S = \mathbb{R}[X]$.

2. Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ stables par D ?

Exercice 7. On note σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\sigma(P) = XP$ pour tout polynôme P.

1. Montrer que $\{0\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$ stable par σ.
2. Soit $S \subset \mathbb{R}[X]$ un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ stable par σ et non réduit à $\{0\}$.
   (a) Justifier pourquoi on peut choisir un polynôme A de degré minimal dans $S \setminus \{0\}$.
   (b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $QA \in S$.
   (c) Soit $B \in S$. En effectuant la division euclidienne de B par A, montrer que A divise B.
3. Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ stables par σ ?

Exercices d'entraînement

Exercice 8. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ deux entiers, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m+n$, soit $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_n)$ une base de E. On note $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_m)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_n)$.
On note u l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathcal{B}$ par : pour tout i (avec $1 \leq i \leq m$), $u(f_i) = 2f_i$ et pour tout j (avec $1 \leq j \leq n$), $u(g_j) = 3g_j$.

1. (Commutant de u) Montrer que, pour tout v endomorphisme de E : v commute avec $u \iff F$ et G sont stables par v.
2. (Espaces stables par u)
   Dans cette question, on note $p = 3\,\mathrm{Id} - u$ et $q = u - 2\,\mathrm{Id}$.
   (a) Montrer que p et q sont des projections, et préciser lesquelles.
   (b) Soit $S \subset E$ un sous-espace de E. Montrer que $p(S)$ et $q(S)$ sont en somme directe et que
   $S \subset p(S) \oplus q(S)$.
   Fournir un exemple montrant que cette inclusion peut être stricte.
   (c) Soit $S \subset E$ un sous-espace de E stable par u. Montrer que $p(S) \subset S$ et que $q(S) \subset S$. En déduire que $S = p(S) \oplus q(S)$.
   (d) Soit $S \subset E$ un sous-espace de E. Montrer que : S est stable par $u \iff \exists M, N$ sous-espaces respectifs de F et G avec $S = M \oplus N$.
3. (Restrictions de u) Soit v une restriction de u à un sous-espace S de E stable par u. Montrer qu'il existe deux entiers naturels a et b pour lesquels $\det v = 2^a 3^b$.
4. (Semi-simplicité de u) En utilisant le 2), montrer que si S est stable par u, il existe un supplémentaire de S stable par u.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E, b et c deux réels. On suppose que $u^2 + bu + c\,\mathrm{Id} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Dans cette question, on suppose $b^2 - 4c > 0$. On note α et β les deux racines réelles du polynôme $X^2 + bX + c$.
   (a) Soit v et w deux endomorphismes de E tels que $v \circ w = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, v + \mathrm{rg}\, w \leq \dim E$.
   (b) Montrer que $(u - \alpha\,\mathrm{Id}) \circ (u - \beta\,\mathrm{Id}) = 0$.
   (c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \beta\,\mathrm{Id})$.
2. Dans cette question, on suppose $b^2 - 4c < 0$.
   (a) Montrer que si $x \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u(x) \neq \lambda x$.
   (b) Montrer qu'il n'y a pas de droite stable par u.
   (c) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'espace engendré par les $u^n(x)$ $(n \geq 0)$ est stable par u, puis montrer que c'est un plan. On le notera P_x dans la suite.

(d) Soit S un sous-espace stable par u et x un vecteur non nul de E. Montrer que ou bien $P_x \subset S$, ou bien $P_x \cap S = \{0\}$.

(e) On construit itérativement une suite de vecteurs comme suit : si $E \neq \{0\}$, on prend un x_1 non nul dans E. Ensuite, si $E \neq P_{x_1}$, on prend un x_2 dans $E \backslash P_{x_1}$. À l'étape suivante, si $E \neq P_{x_1} + P_{x_2}$, on prend un x_3 hors de $P_{x_1} + P_{x_2}$, et ainsi de suite.

i. Montrer que cette procédure s'arrête nécessairement.

ii. Montrer par récurrence sur k que $P_{x_1}, \ldots, P_{x_k}$ sont en somme directe.

iii. Conclure que E est de dimension paire, et peut être décomposé comme somme directe de plans stables par u.

(f) En modifiant légèrement la construction précédente, montrer que tout sous-espace de E stable par u possède un supplémentaire stable par u.

3. Dans cette question, on suppose $b^2 - 4c = 0$.

Montrer que, ou bien u est une homothétie, ou bien il existe un sous-espace de E stable par u qui ne possède aucun supplémentaire stable par u.