

Feuille d'exercices n° 3

TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. Ouverts et fermés

Exercice 1. Les parties suivantes de \mathbb{R}^n sont-elles ouvertes ? fermées ?

- | | |
|--|---|
| 1. $]a; b]$ et $[a; +\infty[$ pour a et b réels tels que $a < b$, | 5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$, |
| 2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x - 1 < 1\}$, | 6. $E = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_1^2 + \dots + x_p^2 \leq 5\}$ où |
| 3. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z\}$, | $p \in \mathbb{N}^*$. |
| 4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1 \text{ et } y \leq 2\}$, | |

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in E$ et on définit

$$\begin{array}{lcl} t & : & E \longmapsto E \\ & & u \longmapsto x_0 + u \end{array}$$

1. Montrer que si $U \subset E$ est une partie ouverte, alors $t(U)$ est aussi une partie ouverte de E .
2. Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $t(F)$ est aussi une partie fermée de E .

Exercice 3. Démontrer que \mathbb{Z} est une partie fermée de \mathbb{R} :

1. en observant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 4. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .
2. Montrer que $U = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .

Exercice 5. Notons E le \mathbb{R} -espace vectoriel des suites réelles bornées. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall u = (u_n)_n \in E, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles de E suivants sont fermés ou non :

1. A l'ensemble des suites croissantes de E ,
2. B l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0,
3. C l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

II. Intérieur, adhérence et densité

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E , on note $\overset{\circ}{X}$ l'intérieur de X et \overline{X} l'adhérence de X . Soient A, B deux parties de E .

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Comparer les ensembles $(A \overset{\circ}{\cap} B)$ et $\overset{\circ}{A} \overset{\circ}{\cap} \overset{\circ}{B}$, puis les ensembles $(A \overset{\circ}{\cup} B)$ et $\overset{\circ}{A} \overset{\circ}{\cup} \overset{\circ}{B}$.
3. Comparer les ensembles $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, puis les ensembles $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 8. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

$$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\},$$

Exercice 9. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ et on note $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.
2. Le but de cette question est de montrer que F n'est pas un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais qu'il est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
 - (a) Soit $g \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], f_n(t) = ntg\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right], f_n(t) = g(t).$$

Montrer que $f_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers g pour $\|\cdot\|_1$.
- (c) Conclure.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$. En déduire les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts.
3. On considère un hyperplan H de E c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle. Il existe alors $a \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E .

III. Compacts

Exercice 11. Déterminer si les ensembles suivants de \mathbb{R}^2 sont, ou ne sont pas, compacts :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 1\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^5 = 2\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$,
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1 - 2x)\}$.

Exercice 12. On considère $E = \mathcal{C}([0; 2\pi]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{inx}$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.

1. Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, calculer explicitement $\|f_n - f_p\|_2$.
2. En déduire que la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E n'est pas compacte.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E . On définit $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A+B$ est fermé dans E .
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A+B$ l'est aussi.
3. Soient $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de \mathbb{R}^2 mais que $A+B$ n'en est pas un.

Exercice 14. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.