

Feuille d'exercices n° 3

SÉRIES ENTIÈRES

**Exercice 1. Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes (pour  $z \in \mathbb{C}$ ) :

- |                              |                                        |                                                   |
|------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1. $\sum (-1)^n (n+3)! z^n,$ | 3. $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n,$    | 5. $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n,$ |
| 2. $\sum n^n z^n,$           | 4. $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n,$ | 6. $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) z^n.$   |

**Exercice 2.**

- Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|$ . Comparer les rayons de convergences, notés respectivement  $R_a$  et  $R_b$ , des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $c_n = n^2 \int_0^1 \arctan(x^n) dx$ . On donne :  $\forall x \in [0; 1], x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$ .
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer un encadrement de  $c_n$ , par des termes non nuls.
  - En déduire le rayon de convergence de la série entière  $\sum c_n z^n$ .

**Exercice 3. Rayon de convergence**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- $\sum a_n z^{3n},$
- $\sum a_n 3^n z^{2n},$
- On suppose désormais  $R > 0$ . Montrer que la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini.

**Exercice 4. Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

- |                                           |                                                 |                        |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|------------------------|
| 1. $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1},$ | 3. $\sum \frac{n!}{1.3 \dots (2n+1)} z^{2n+3}.$ | 5. $\sum z^{n!},$      |
| 2. $\sum \frac{(1+i)^n}{n 2^n} z^{3n},$   | 4. $\sum (1 + (-1)^n / n)^{(n^2)} z^n.$         | 6. $\sum n^n z^{n^2}.$ |

**Exercice 5. Rayon de convergence**

Déterminer le rayon de convergence,  $R$ , de  $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ , puis étudier sa convergence pour  $|z| = R$ .

**Exercice 6. Vrai ou Faux** Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ? (On donnera une démonstration si elles sont vraies ou un contre-exemple si elles sont fausses).

- Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum (-1)^n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.
- Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum (-1)^n a_n z^n$  ont le même domaine de convergence.

### Exercice 7. Série entière, calcul explicite

Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes pour  $x$  dans l'intervalle ouvert de convergence :

$$\begin{array}{llll} 1. \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n, & 3. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & 5. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)!} x^n, & 7. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n \\ 2. \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^{2n}, & 4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n, & 6. \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n & \end{array}$$

### Exercice 8. Séries entières et équation différentielle

Déterminer les séries entières dont la fonction somme est solution de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2 - 1)f'(x) - (2x^2 + 1)f(x) = 0. \quad (1)$$

Préciser le rayon des séries entières obtenues.

### Exercice 9. Série entière et équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad f''(x) - 4f(x) = 0. \quad (2)$$

On cherche  $f$  sous la forme de la somme d'une série entière :  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ , et vérifiant les conditions  $f(0) = 4$  et  $f'(0) = 0$ .

Montrer que la seule solution est donnée par  $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$ , et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

### Exercice 10. Attention au rayon!!

Déterminer l'ensemble des fonctions développables en séries entières (au voisinage de 0) de l'équation différentielle

$$(E) : \quad x^2 y' + y = x.$$

### Exercice 11. Série entière et équation différentielle

On cherche le développement en série entière de  $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , par la "méthode de l'équation différentielle".

1. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle

$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \quad (3)$$

(Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle?)

2. Déterminer les solutions de (3) développables en séries entières et préciser le rayon de convergence de la série entière associée.
3. Montrer que si  $g$  est solution de l'équation (3) sur un intervalle  $I$  contenu dans  $] -1; +\infty[$  alors il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in I, g(x) = C(1+x)^\alpha$ .
4. En déduire le développement en série entière de  $f$  en 0.

### Exercice 12. Développements en série entière

Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes et déterminer les rayons de convergence des séries entières obtenues :

1.  $x \mapsto \frac{1}{x-5}$ ,

4.  $x \mapsto \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right)$ .

7.  $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ ,

2.  $x \mapsto \frac{1}{1+9x^2}$ ,

5.  $x \mapsto \frac{1}{(2+x)^3}$ ,

8. (\*)  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x(\cos \alpha) + 1}$   
pour  $\alpha \in ]0, \pi[$  fixé,

3.  $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ ,

6.  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ ,

9. (\*)  $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ .

*Indication : pour la question 8, on factorisera le dénominateur dans  $\mathbb{C}$ , et pour la question 9, on pourra remarquer que  $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ .*

### Exercice 13. Développements en série entière en un point différent de 0

Développer en série entière les fonctions suivantes au point donné :

1.  $x \mapsto \ln(x)$  en 1 puis en 2,

3.  $x \mapsto e^x$  en  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

2.  $x \mapsto \sin(x)$  en  $\pi/4$ ,

4.  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  en 2.

### Exercice 14. Applications des séries entières

1. On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$  si  $x \neq 0$  et par  $f(0) = 1$ . Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. (a) Montrer que la fonction sinus cardinal définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $\text{sinc}(0) = 1$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Établir l'égalité :

$$\int_0^\pi \text{sinc}(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

### Exercice 15. Série de Taylor

Donner un exemple de fonction définie sur tout  $\mathbb{R}$  mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 16. Série de Taylor

Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !** On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$ .

2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .

3. En déduire que  $f$  n'est pas développable en série entière en 0.

**Pour aller plus loin :**

**Exercice 17.** Pour  $n \geq 1$ , et  $x \in \mathbb{R}$ , on note

$$f_n(x) = e^{-n} \cos(n^2 x) \quad \text{puis on pose} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série de fonctions qui définit  $f$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que sa somme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et en particulier que, pour tout  $k \geq 1$  :

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} n^{4k}.$$

En utilisant la formule de Stirling  $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , montrer que la série de Taylor de  $f$  en 0 a un rayon de convergence nul.

**Pour s'entraîner : quelques exercices issus d'anciens examens finaux**

**Exercice 18.** Montrer que l'équation différentielle  $x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0$  admet une unique solution développable en série entière et déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

**Exercice 19.**

1. Pour  $w \in \mathbb{R}$ , on considère l'équation différentielle  $(E) : xy'' + 2y' + w^2 xy = 0$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une fonction  $f$  développable en série entière autour de 0 solution de  $(E)$  et vérifiant la condition  $f(0) = 1$ . Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.
  - (b) Exprimer  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.N.B. : Pour les questions (a) et (b), il sera conseillé de discuter les cas  $w = 0$  ou non.
2. Déterminer la nature de la série numérique de terme général  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ .

**Exercice 20.**

1. Pour  $x > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n(x) = \frac{1}{2^{nx}}$ .
  - (a) Justifier l'existence et calculer  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  pour  $x > 0$ .
  - (b) Justifier la dérivabilité de  $u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum u'_n$  converge normalement sur tout intervalle  $[a, b]$  où  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $0 < a < b$ .
  - (c) Calculer alors la somme de cette série pour  $x > 0$ .
2. Trouver le rayon de convergence  $R$  des séries entières  $\sum a_n z^n$  où  $(a_n)_n$  est donnée par :
  - (a)  $a_n = \frac{n^3}{3^n}, \forall n \geq 0$ ,
  - (b)  $a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}, \forall n \geq 1$ , avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
*Indication : on pourra d'abord regarder le cas où  $|z| < 1$ , puis raisonner par l'absurde en utilisant la série dérivée.*
3. On considère l'équation différentielle  $(E) : xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une unique solution  $f$  de  $(E)$ , développable en série entière autour de 0 et telle que  $f(0) = 1$ .
  - (b) Exprimer  $f$  à l'aide des fonctions élémentaires.