

Feuille d'exercices n° 3

SÉRIES ENTIÈRES

Exercice 1. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes (pour $z \in \mathbb{C}$) :

- | | | |
|------------------------------|--|---|
| 1. $\sum (-1)^n (n+3)! z^n,$ | 3. $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n,$ | 5. $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n,$ |
| 2. $\sum n^n z^n,$ | 4. $\sum \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n,$ | 6. $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) z^n.$ |

Exercice 2.

- Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |b_n|$. Comparer les rayons de convergences, notés respectivement R_a et R_b , des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = n^2 \int_0^1 \arctan(x^n) dx$. On donne : $\forall x \in [0; 1], x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x)$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer un encadrement de c_n , par des termes non nuls.
 - En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$.

Exercice 3. Rayon de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- $\sum a_n z^{3n},$
- $\sum a_n 3^n z^{2n},$
- On suppose désormais $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 4. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

- | | | |
|---|---|------------------------|
| 1. $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1},$ | 3. $\sum \frac{n!}{1.3 \dots (2n+1)} z^{2n+3}.$ | 5. $\sum z^{n!},$ |
| 2. $\sum \frac{(1+i)^n}{n 2^n} z^{3n},$ | 4. $\sum (1 + (-1)^n/n)^{(n^2)} z^n.$ | 6. $\sum n^n z^{n^2}.$ |

Exercice 5. Rayon de convergence

Déterminer le rayon de convergence, R , de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice 6. Vrai ou Faux Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ? (On donnera une démonstration si elles sont vraies ou un contre-exemple si elles sont fausses).

- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice 7. Série entière, calcul explicite

Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes pour x dans l'intervalle ouvert de convergence :

$$\begin{array}{llll} 1. \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n, & 3. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & 5. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)!} x^n, & 7. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n \\ 2. \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^{2n}, & 4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n, & 6. \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n & \end{array}$$

Exercice 8. Séries entières et équation différentielle

Déterminer les séries entières dont la fonction somme est solution de

$$x^2 f''(x) - x(2x^2 - 1)f'(x) - (2x^2 + 1)f(x) = 0. \quad (1)$$

Préciser le rayon des séries entières obtenues.

Exercice 9. Série entière et équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad f''(x) - 4f(x) = 0. \quad (2)$$

On cherche f sous la forme de la somme d'une série entière : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et vérifiant les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = 0$.

Montrer que la seule solution est donnée par $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1}}{(2p)!} x^{2p}$, et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 10. Attention au rayon!!

Déterminer l'ensemble des fonctions développables en séries entières (au voisinage de 0) de l'équation différentielle

$$(E) : \quad x^2 y' + y = x.$$

Exercice 11. Série entière et équation différentielle

On cherche le développement en série entière de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, par la "méthode de l'équation différentielle".

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0. \quad (3)$$

(Auriez-vous pu déterminer vous-même cette équation différentielle?)

2. Déterminer les solutions de (3) développables en séries entières et préciser le rayon de convergence de la série entière associée.
3. Montrer que si g est solution de l'équation (3) sur un intervalle I contenu dans $] -1; +\infty[$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, g(x) = C(1+x)^\alpha$.
4. En déduire le développement en série entière de f en 0.

Exercice 12. Développements en série entière

Développer en série entière autour de 0 les fonctions suivantes et déterminer les rayons de convergence des séries entières obtenues :

1. $x \mapsto \frac{1}{x-5},$

4. $x \mapsto \ln\left(\frac{5-x}{3+x}\right).$

7. $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+2)},$

2. $x \mapsto \frac{1}{1+9x^2},$

5. $x \mapsto \frac{1}{(2+x)^3},$

8. (*) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x(\cos \alpha) + 1}$
pour $\alpha \in]0, \pi[$ fixé,

3. $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2},$

6. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^3}},$

9. (*) $x \mapsto \ln(1+x+x^2).$

Indication : pour la question 8, on factorisera le dénominateur dans \mathbb{C} , et pour la question 9, on pourra remarquer que $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$.

Exercice 13. Développements en série entière en un point différent de 0

Développer en série entière les fonctions suivantes au point donné :

1. $x \mapsto \ln(x)$ en 1 puis en 2,

3. $x \mapsto e^x$ en $x_0 \in \mathbb{R}$,

2. $x \mapsto \sin(x)$ en $\pi/4$,

4. $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ en 2.

Exercice 14. Applications des séries entières

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 1$. Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2. (a) Montrer que la fonction sinus cardinal définie sur \mathbb{R} par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $\text{sinc}(0) = 1$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(b) Établir l'égalité :

$$\int_0^\pi \text{sinc}(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Exercice 15. Série de Taylor

Donner un exemple de fonction définie sur tout \mathbb{R} mais dont la série de Taylor ne converge pas sur tout \mathbb{R} .

Exercice 16. Série de Taylor

Exemple classique (mais un peu lourd) : la série de Taylor converge, mais **pas vers la fonction !** On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp(-1/x^2)$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Pour aller plus loin :

Exercice 17. Pour $n \geq 1$, et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$f_n(x) = e^{-n} \cos(n^2 x) \quad \text{puis on pose} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que la série de fonctions qui définit f converge simplement sur \mathbb{R} .
2. Montrer que sa somme f est de classe \mathcal{C}^∞ , et en particulier que, pour tout $k \geq 1$:

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} n^{4k}.$$

En utilisant la formule de Stirling $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer que la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence nul.

Pour s'entraîner : quelques exercices issus d'anciens examens finaux

Exercice 18. Montrer que l'équation différentielle $x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y - 1 = 0$ admet une unique solution développable en série entière et déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

Exercice 19.

1. Pour $w \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle $(E) : xy'' + 2y' + w^2 xy = 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe une fonction f développable en série entière autour de 0 solution de (E) et vérifiant la condition $f(0) = 1$. Préciser le rayon de convergence de la série entière obtenue.
 - (b) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.N.B. : Pour les questions (a) et (b), il sera conseillé de discuter les cas $w = 0$ ou non.
2. Déterminer la nature de la série numérique de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 20.

1. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{2^{nx}}$.
 - (a) Justifier l'existence et calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x > 0$.
 - (b) Justifier la dérivabilité de u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur tout intervalle $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < a < b$.
 - (c) Calculer alors la somme de cette série pour $x > 0$.
2. Trouver le rayon de convergence R des séries entières $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est donnée par :
 - (a) $a_n = \frac{n^3}{3^n}, \forall n \geq 0$,
 - (b) $a_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}, \forall n \geq 1$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
Indication : on pourra d'abord regarder le cas où $|z| < 1$, puis raisonner par l'absurde en utilisant la série dérivée.
3. On considère l'équation différentielle $(E) : xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) , développable en série entière autour de 0 et telle que $f(0) = 1$.
 - (b) Exprimer f à l'aide des fonctions élémentaires.