Feuille d'exercices n° 3

Espaces vectoriels normés – Topologie

I. Normes et distances

Exercice 1. Les normes usuelles de $\mathbb{R}^n$

On définit sur $\mathbb{R}^n$ les applications suivantes :

pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|,$$

1. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. On s'intéresse ici à la norme $\|x\|_2$:
   a. On se propose de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour cela on introduit la fonction polynôme de degré 2 définie par :
   $$P : t \to \sum_{i=1}^{n} (x_i + ty_i)^2,$$
   lorsque x et y désignent deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$.
      i. Quelle condition sur le discriminant de P traduit le fait que P est toujours à valeurs positives ?
      ii. En déduire l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz
      $$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$
   b. En déduire que $\|.\|_2$ vérifie l'inégalité triangulaire et constitue une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. Etablir les inégalités suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\left\{\begin{array}{ccccc} \|x\|_\infty & \leq & \|x\|_1 & \leq & n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty & \leq & \|x\|_2 & \leq & \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \|x\|_2 & \leq & \|x\|_1 & \leq & \sqrt{n}\|x\|_2. \end{array}\right.$$
   En conclure que les trois normes étudiées sont équivalentes.
4. Représenter dans $\mathbb{R}^2$ les boules centrées à l'origine et de rayon 1 pour chacune des trois normes envisagées ci-dessus.

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$N_1 \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array}, \qquad N_2 \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|) \end{array}.$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer la boule unité fermée autour de l'origine par rapport à N_1, et par rapport à N_2.

Exercice 3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application

$$N \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & |ax_1 + bx_2| + |cx_1 + dx_2| \end{array}$$

définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Les applications N suivantes sont-elles des normes ?

1. $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.
2. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \longmapsto \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|^2$.
3. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \longmapsto \sup_{x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]} |f(x)|$.
4. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \longmapsto \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$.
5. $N : C([0; 2\pi], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t) \sin t| \, dt$.
6. $N : C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \longmapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ (où $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
7. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f \longmapsto \left| \displaystyle\int_0^1 f(t) dt \right|$.
8. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, y) \longmapsto |x| + 2|y|$.
9. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, y) \longmapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \right)^2$.

Exercice 5. Pour tout $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 \, \mathrm{d}t}, \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |f(t)|.$$

1. On a vu dans l'exercice précédent que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur $C([0; 1], \mathbb{R})$. Montrer que $\| \ \|_2$ définit aussi une norme sur $C([0; 1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $f \in C([0; 1], \mathbb{R})$, on a $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes.

   Indication : on pourra considérer les fonctions $f_n : x \longmapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel. Pour $x, y \in E$ on définit

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $d(x, y)$ définit une distance.
2. Montrer que cette distance n'est induite par aucune norme.

Exercice 7. Espaces métriques et espaces vectoriels normés

Soit l'application

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) = \left| \dfrac{x}{1 + |x|} - \dfrac{y}{1 + |y|} \right|. \end{array}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. La distance est-elle induite par une norme ?
3. On munit $\mathbb{R}$ de la distance d. Montrer que $\mathbb{R}$ est borné. Calculer son diamètre.
   On rappelle que le diamètre d'une partie $A \in \mathbb{R}^n$ bornée est défini par :

$$\delta(A) = \sup_{(X,X') \in A \times A} d(X, X').$$

II. Ouverts, fermés

Exercice 8. Montrer en utilisant la définition d'un ouvert et d'un fermé que :

1. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une réunion de boules ouvertes.
2. L'ensemble $]a, b[$, $a < b$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $[a, b]$, $a < b$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
4. L'ensemble $[a, b[$, $a < b$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.
7. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant une boule ouverte, alors $F = \mathbb{R}^n$.

Exercice 9. Déterminer si les ensembles suivantes sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

1. L'intervalle dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 < x < 3, y = 0.\}$
2. Le cercle unitaire : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1.\}$
3. Le disque : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1.\}$

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in F$ et on définit

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \longmapsto & E \\ & & u & \longrightarrow & x_0 + u \end{array}$$

1. Montrer que si $U \subset E$ est une partie ouverte, alors $f(U)$ est aussi une partie ouverte de E.
2. Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 11.

1. Montrer que si $\{U_i\}_{i=1}^I$ est une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^I U_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[$ et en déduire que le résultat précédent ne se généralise pas lorsque l'on considère une famille infinie d'ouverts.
3. Enoncer (et démontrer) les résultats analogues à ceux qui précèdent concernant l'union de familles de fermés.

Exercice 12. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

1. en observant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées,
3. en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon.
2. Démontrer que l'intérieur d'une boule fermée et la boule ouverte de même rayon.

Exercice 14. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E, on note X° l'intérieur de X et $\overline{X}$ l'adhérence de X. Soient A, B deux parties de E.

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $A^\circ \subset B^\circ$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Comparer les ensembles $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$, puis les ensembles $(A \cup B)^\circ$ et $A^\circ \cup B^\circ$.

Exercice 15. Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,

Exercice 16. Voisinage

Soit P un point de $\mathbb{R}^n$. En général on dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété <u>dans un voisinage de P</u> si cette propriété est satisfaite au moins dans un ensemble ouvert contenant P.

1. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont *positives* au voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

2. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont *définies* au voisinage de l'origine :

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}, \qquad f(x, y) = \ln(\cos(x^2 + y^2)).$$