Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices 3

PRODUITS SCALAIRES – ESPACES EUCLIDIENS - PROJECTIONS ORTHOGONALES

Exercice 1.

1. On considère sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ la forme bilinéaire

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire. On l'appelle le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, sur cette base, le produit scalaire de E est donné par l'expression ci-dessus.

Exercice 2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une famille de E.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a

$$x = \langle x, b_1\rangle\, b_1 + \cdots + \langle x, b_n\rangle\, b_n.$$

2. On suppose que $\|b_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, n$ et que, pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \langle x, b_1\rangle^2 + \cdots + \langle x, b_n\rangle^2.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale, puis que c'est une base orthonormale.

Exercice 3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Calculer la dimension de $F^\perp$.
   (Indication : considérer l'application de E dans $\mathbb{R}^m$ définie par $x \mapsto (\langle x, b_1\rangle, \dots, \langle x, b_m\rangle)$ avec $(b_1, \dots, b_m)$ une base orthonormale de F.)

2. En déduire que $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré ≤ 3. On considère sur E l'application bilinéaire

$$\langle a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

1. Expliquer pourquoi $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On note H l'ensemble des $P(X) \in E$ tels que $P(1) = 0$.

   (a) Montrer que H est un hyperplan de E. Déterminer une base de H.

   (b) Déterminer une base orthonormale de H.

   (c) En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 5. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Pour F un sous-espace vectoriel de E, on appelle projection orthogonale sur F la projection sur F selon la somme directe $E = F \oplus F^\perp$; en d'autres termes, pour tout $x \in E$, $\pi_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - \pi_F(x) \in F^\perp$.

1. Soit $(c_1, \ldots, c_m)$ une base orthonormale de F. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a
$$\pi_F(x) = \langle x, c_1\rangle\, c_1 + \cdots + \langle x, c_m\rangle\, c_m.$$

2. Soient $v \in E$ non nul et $F = \mathrm{Vect}(v)$ le sous-espace engendré par v. On note $\pi_v = \pi_{F_v}$. Montrer que
$$\pi_v(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v, \rangle}\, v.$$

3. (Orthonormalisation de Gram-Schmidt.) Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. On construit une famille $(d_1, \ldots, d_n)$ de la manière suivante
$$d_1 = b_1,\ d_2 = b_2 - \pi_{d_1}(b_2), \ldots,\ d_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} \pi_{d_j}(b_k), \ldots$$
Montrer que $(d_1, \ldots, d_n)$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthonormale de E.

4. Appliquer cette construction pour obtenir une base orthonormale de $E = \mathbb{R}_3[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré ≤ 3 munit du produit scalaire
$$\langle P, Q, \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\, dx$$
en partant de la base $(1, X, X^2, X^3)$.

Exercice 6. On utilise les notations et définitions de l'exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = {}^t(1, 0, 2)$ et $v_2 = {}^t(2, 1, 0)$.

1. Calculer la matrice de π_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de π_F est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.

3. Déterminer toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ dans lesquelles la matrice de π_F est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, 0)$.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien et soit π une projection de E. Montrer que π est une projection orthogonale si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien et soient π_1 et π_2 deux projections orthogonales de E. Montrer que $\mathrm{Im}(\pi_1) \subset \mathrm{Im}(\pi_2)$ si et seulement si $\|\pi_1(x)\| \leq \|\pi_2(x)\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 9. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On dit qu'une famille $(v_0, \ldots, v_m)$ de vecteurs de E est *obtusangle* si, pour tous $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ avec $i \neq j$, on a

$$\langle v_i, v_j \rangle < 0.$$

1. Dessiner une famille obtusangle de trois vecteurs dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(v_0, \ldots, v_m)$ une famille obtusangle de E. Montrer que, pour tous $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, on a
$$\left\| \sum_{i=0}^{m} |\alpha_i| \, v_i \right\|^2 \leq \left\| \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \, v_i \right\|^2. \qquad (\dagger)$$
3. Le but de cette question est de démontrer que si $(v_0, \ldots, v_m)$ est famille obtusangle alors la famille $(v_1, \ldots, v_m)$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des nombres réels tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$. On pose
$$A = \big\{ i \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_i > 0 \big\}, \quad B = \big\{ i \in \{1, \ldots, m\} : \lambda_i \leq 0 \big\} \quad \text{et} \quad u = \sum_{i \in A} \lambda_i v_i.$$
   (a) Montrer que $u = -\sum_{j \in B} \lambda_j v_j$. En déduire que
   $$\|u\|^2 = -\left\langle \sum_{i \in A} \lambda_i v_i, \sum_{j \in B} \lambda_j v_j \right\rangle,$$
   puis que $u = 0$.

   (b) En calculant $\langle v_0, u \rangle$, en déduire que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ et conclure.
4. Soit $(v_0, \ldots, v_n)$ une famille obtusangle de E.

   (a) Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E.

   (b) On note $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les coordonnées de v_0 sur la base $(v_1, \ldots, v_n)$. Montrer que $\mu_i \leq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.
   (Indication : utiliser l'inégalité $(\dagger)$ avec $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_i = \mu_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.)

Exercice 10. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Pour $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille de E, on définit le *déterminant de Gram* de cette famille comme étant le déterminant de la matrice suivante

$$G(v_1, \ldots, v_k) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix}.$$

On rappelle le résultat suivant prouvée dans la fiche précédente : si la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est liée alors son déterminant de Gram est nul.
On suppose pour la suite que la famille $(v_1, \ldots, v_k)$ est libre. On note $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ le sous-espace vectoriel qu'elle engendre et π_F la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que le déterminant de Gram de $(v_1, \ldots, v_k)$ est strictement positif.

2. Soit $x \in E$ un vecteur. On note A le vecteur colonne des coordonnées de $\pi_F(x)$ sur $(v_1, \ldots, v_k)$. Montrer que
$$G(v_1, \ldots, v_k) \cdot A = \begin{pmatrix} \langle x, v_1 \rangle \\ \langle x, v_2 \rangle \\ \cdots \\ \langle x, v_k \rangle \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que, pour tout $x \in E$, on a
$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(v_1, \ldots, v_k, x)}{\det G(v_1, \ldots, v_k)}.$$

4. Soit $(u_1, \ldots, u_\ell)$ une famille de vecteurs de E. En utilisant la question précédente, montrer que
$$\det G(u_1, \ldots, u_\ell) \leq \|u_1\|^2 \cdots \|u_\ell\|^2.$$
(Indication : on pourra procéder en faisant une récurrence sur ℓ.)

Exercice 11. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\mathcal{C}$, on pose
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt.$$

1. Montrer que $\langle ., . \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter l'intégrale
$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t) - a - b\sin(t) - c\cos(t)\big)^2 dt \tag{‡}$$
comme la distance de f à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

3. En déduire l'expression de $a, b, c \in \mathbb{R}$ en fonction de f tels que (‡) est minimal.

4. Application. Déterminer a, b, c pour $f(t) = t$.

Exercice 12. Soient E et E' deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $i : E \to E'$ une application linéaire telle que $\mathrm{Ker}(i) = \{0\}$. On note $F = \mathrm{Im}(i)$.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire $s : E' \to E$ telle que $s \circ i = \mathrm{Id}_E$.

2. Montrer que $i \circ s$ est une projection d'image F.

3. Montrer que l'application s n'est pas unique si $\dim(E) < \dim(E')$.

On suppose à présent que E' est un espace euclidien.

4. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $s : E' \to E$ telle que $s \circ i = \mathrm{Id}_E$ et la projection $i \circ s$ est une projection orthogonale. On appelle s le *pseudo-inverse* (ou inverse généralisé) de i.

5. Soit $y \in E'$ et soit $x \in E$ tel que la distance de $i(x)$ à y est minimale. Montrer que x est unique, puis que $x = s(y)$.

On suppose désormais que E est également un espace euclidien. On pose $n = \dim(E)$ et $m = \dim(E')$. On note A la matrice (m, n) de i dans des bases orthonormales fixées de E et E'.

6. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne non nul. Montrer que $AX \neq 0$, puis que ${}^tX({}^tAA)X > 0$. En déduire que ${}^tAA$ est la matrice d'une forme quadratique définie positive et que ${}^tAA$ est inversible.

7. Soit π une projection de E'. Montrer que π est une projection orthogonale si et seulement si la matrice de π (dans la base orthonormée fixée) est symétrique.

8. On pose
$$B = ({}^tAA)^{-1} \cdot {}^tA.$$
Vérifier que $BA = I$, $(AB)^2 = AB$ et que AB est une matrice symétrique.
En déduire que B est la matrice du pseudo-inverse de i.

9. On considère $\mathbb{R}^m$ munit du produit scalaire usuel. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^m$ et soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_m)$. On note A la matrice (m, n) dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. A l'aide des questions précédentes, exprimer la matrice (sur la base canonique) de la projection orthogonale sur F à partir de la matrice A.

Exercice 13. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$. Pour F un sous-espace vectoriel de E, on définit la fonction $q_F : E \to \mathbb{R}$ donnée par
$$q_F(x) = \frac{d(x, F)^2}{n+1}.$$

1. Montrer que q_F est une forme quadratique positive sur E et que q est définie positive si et seulement si $F = \{0\}$.

On suppose dorénavant que $E = \mathbb{R}^{n+1}$ avec le produit scalaire usuel et que F est la droite scalaire engendrée par le vecteur $e_0 = {}^t(1, \ldots, 1)$. On note Var la forme quadratique q_F et Cov la forme polaire de Var.

2. Soit $x = {}^t(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Expliciter les formules donnant la projection orthogonale de x sur F, puis le réel positif $\mathrm{Var}(x)$.

3. Soient $x, y \in E \setminus F$. Montrer que

$$-1 \leq \frac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(x)}\sqrt{\operatorname{Var}(y)}} \leq 1$$

et que le quotient vaut ± 1 si et seulement si la famille (x, y, e) est liée.
(Indication : commencer par montrer que $\operatorname{Var}(x) = \|\pi(x)\|^2$ où π est la projection orthogonale sur $F^\perp$, puis utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

On fixe $n+1$ points $P_i = (u_i, v_i)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ tels que les u_i sont deux à deux distincts et les v_i sont deux à deux distincts.

4. On pose

$$\Pi = \left\{ {}^t(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{ les points } (u_0, t_0), \ldots, (u_n, t_n) \text{ sont alignés} \right\}.$$

Montrer que Π est un sous-espace vectoriel et qu'une base de Π est (e_0, e_1) avec $e_0 = {}^t(1, \ldots, 1)$ et $e_1 = {}^t(u_0, \ldots, u_n)$.

5. On appelle *droite de régression de Y en X pour les points P_i* la droite (non verticale) Δ du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité

$$\sum_{i=0}^{n} (v_i - au_i - b)^2.$$

Expliquer pourquoi déterminer Δ revient à déterminer la projection orthogonale du vecteur ${}^t(v_0, \ldots, v_n)$ sur Π.

6. Expliciter la base orthonormée $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ de Π obtenue à partir de la base (e_0, e_1) par le procédé de Gram-Schmidt.

7. En utilisant les résultats du début de l'exercice, montrer que l'équation de Δ est

$$y - \bar{v} = \frac{\operatorname{Cov}(u,v)}{\operatorname{Var}(u)} (x - \bar{u})$$

où $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont les moyennes arithmétiques des u_i et des v_i respectivement.

8. On appelle *droite de régression de X en Y pour les points P_i* la droite (non horizontale) Δ' du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = \alpha x + \beta$ qui minimise la quantité

$$\sum_{i=0}^{n} (u_i - \alpha u_i - \beta)^2.$$

Déterminer l'équation de la droite Δ'.
Montrer que $\Delta = \Delta'$ si et seulement si les points P_i sont alignés, et que, si les points P_i ne sont pas alignés, les droites Δ et Δ' ont un unique point d'intersection que l'on calculera.