Feuille d'exercices n° 3

Adjoints et théorème spectral

I. Manipulations de l'adjoint

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. On définit l'application linéaire

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme autoadjoint.
2. On remplace désormais le produit scalaire usuel par le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
L'endomorphisme T est-il autoadjoint pour ce produit scalaire ? Si non, déterminer l'adjoint de T.

Exercice 2. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_1[X]$ du produit scalaire défini par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Déterminer l'adjoint de l'endomorphisme de dérivation $\delta : P \in E \longmapsto P'$.

Exercice 3. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^* \circ u)$.
2. En déduire que $\operatorname{rang}(u^* \circ u) = \operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(u \circ u^*)$.
3. Comparer $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Im}(u^* \circ u)$.

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u + u^*) = \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u^*)$.
2. Montrer l'équivalence : $u + u^*$ est inversible $\iff$ $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

Exercice 5. Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et k un réel.

1. Montrer que $f : x \longmapsto x + k\langle x, a\rangle a$ est un endomorphisme autoadjoint de E.
2. Montrer que a est un vecteur propre de f.
3. En déduire le spectre de f et les sous-espaces propres de f.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle M, N \rangle = \operatorname{Tr}({}^tMN).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint. Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 7. Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer l'équivalence :

$$p \text{ est autoadjoint} \iff p \text{ est une projection orthogonale.}$$

Exercice 8. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme u de E est non-expansif lorsque pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Soit u un endomorphisme non expansif de E.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $|\langle y, u^\star(x)\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.
2. En déduire que $u^\star$ est lui-aussi non expansif.
3. Montrer l'inclusion :$\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(u^\star - \operatorname{Id})$.
Indication : on pourra partir d'un élément $x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ et chercher à démontrer que $\|u^\star(x) - x\| = 0$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ et $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux.
5. Quels sont les endomorphismes non-expansifs de la forme $\operatorname{Id} + n$ avec n nilpotent ?

II. Utilisation du théorème spectral

Exercice 9. On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que u est autoadjoint. Justifier l'existence, puis expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 10. On considère la matrice symétrique

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer B^2 et en déduire que B est une matrice orthogonale. Justifier l'existence puis déterminer une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 11. Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I$ (où I désigne la matrice identité).

1. Montrer que $A^2 = I$ puis que A est orthogonale.
2. Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est A dans une base orthonormée ?

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à $[-1;1]$.
2. Soient $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$. Comparer $\mathrm{Tr}(AU)$ et $\mathrm{Tr}(UA)$ à $\mathrm{Tr}(A)$.

III. Intervention de $u^\star \circ u$ ou de ${}^tAA$

Exercice 14. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer les équivalences suivantes.

1. B est symétrique positive si et seulement si il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$,
2. B est symétrique définie positive si et seulement si il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$.

Exercice 15. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[1;n]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A énumérées avec multiplicité. Montrer l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2.$$

Exercice 16. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que u est non-expansif si et seulement si toutes les valeurs propres de $u^\star \circ u$ sont dans $[0;1]$.

Exercice 17. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier l'existence d'une unique matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = S^2$.
2. En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

Pour aller plus loin :

Exercice 18. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ qui diagonalise $u^\star \circ u$.
2. Montrer que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthogonale.
3. On suppose dans cette question que u est bijectif. Montrer que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthogonale de E puis déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est diagonale.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux matrices U et V orthogonales telles que UMV est diagonale.
   Indication : on pensera à utiliser la formule de changement de bases (pour des bases différentes au départ ainsi qu'à l'arrivée).
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible.
   (a) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique. La famille trouvée à la question 2 est-elle une base ?
   (b) Construire à l'aide de cette famille une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus (\mathrm{Im}(u))^\perp$.
   (c) Montrer que le résultat de la question 4 est encore vrai.