Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2025-2026

Mathématiques IV PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 2

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. Normes

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, rappeler l'expression des normes $\|u\|_1$, $\|u\|_2$ et $\|u\|_\infty$.
2. Justifier (sans calcul) que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.
3. Déterminer les constantes α, β et γ optimales (c'est-à-dire les plus petites possibles) telles que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_1 \leq \alpha\|u\|_2 \leq \beta\|u\|_\infty \leq \gamma\|u\|_1.$$

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

$$N_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & |x_1 + x_2| + |x_1| \end{array} \quad \text{et } N_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & \max(|x_1 + 3x_2|, |x_1 - x_2|). \end{array}$$

1. Vérifier que chacune de ces applications définit une norme.
2. Tracer les boules unités fermées centrées en $0_{\mathbb{R}^2}$ pour ces deux normes.

Exercice 3. Les fonctions N suivantes sont-elles des normes sur les espaces considérés ?

1. $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$
2. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \sup\{|f(x)|^2; x \in [0;1]\}$
3. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \sup\{|f(x)|; x \in [0;1/2]\}$
4. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \sup\{|f(x)|; x \in [0;1]\}$
5. $N : C([0;2\pi], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^{2\pi} |f(t)\sin t|\,\mathrm{d}t$
6. $N : C([0;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right|$
7. $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |x| + 2|y|$
8. $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$.

Exercice 4. On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$. On définit deux applications sur E par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que N définit une norme sur E. On admet que N_∞ définit aussi une norme sur E.
2. Montrer que : $\forall u \in E,\ N(u) \leq 2N_\infty(u)$. Déterminer une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $u^{(p)}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(p)} = \begin{cases} n \text{ si } n \leq p \\ p \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer, à l'aide des suites $u^{(p)}$ par exemple, que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application N_∞ par $N_\infty(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que N_∞ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N_\infty(AB) \leq nN_\infty(A)N_\infty(B)$.
2. Soit N une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(AB) \leq cN(A)N(B).$$

II. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad P_n = e^{\frac{1}{n}} + \frac{\cos(n)}{n^2+3}X^2 - 2\frac{\ln(n)}{\ln(n) + \sqrt{\ln(n)}}X^3.$$

Exercice 7. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'applications, définies par :

$$\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = x^{\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}}.$$

(avec la convention $0^x = 0$ pour tout $x > 0$).

1. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction constante $f:[0;1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=1$, pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.
2. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour les trois normes ci-dessus.

Exercice 8. On se place dans l'espace vectoriel $E=\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et on considère N définie par :

$$N(f)=\int_0^1 e^x|f(x)|\mathrm{d}x \text{ pour tout } f\in E.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telle que

$$f_n(x)=\begin{cases}1-nx & \text{si } x\in\left[0;\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{si } x\in\left[\frac{1}{n};1\right]\end{cases}.$$

   (a) Pour un $n\in\mathbb{N}^\star$, tracer la courbe de f_n.

   (b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers la fonction nulle dans (E,N).

   (c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne converge pas vers la fonction nulle dans $(E,\|.\|_\infty)$.

   (d) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 9. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(({}^tA)^k)_{k\in\mathbb{N}})$ converge aussi et en déduire que B est la matrice nulle.

Exercice 10. On note $E=\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et on considère une suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit deux applications N et N' sur E par :

$$\forall P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in E,\quad N(P)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,|a_k|\quad \text{ et } N'(P)=\max_{k\in[\![0;n]\!]}|a_k|\,.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_n$ pour que N définisse une norme sur E. On admet que N' définit une norme sur E.
2. Dans cette question, on suppose que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=X^n$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N.
3. $(*)$ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $Q_n=1+X+\cdots+X^n$. Étudier la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour N'.

Pour s'entraîner :

Exercice 11. On définit l'application $N:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ par :

$$\forall u=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ N(u)=\frac{1}{2}\max\left(|x+y|,|x-y|\right).$$

1. (a) Montrer que l'application N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Dessiner sa boule unité fermée.
2. Pour $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$, on note $S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2},r)$ la sphère de $\mathbb{R}^2$ de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon r.

   (a) Montrer que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $u\in\mathbb{R}^2\setminus\{0_{\mathbb{R}^2}\}$:

$$\frac{u}{\|u\|}\in S_{\|\cdot\|}(0_{\mathbb{R}^2},1)\,.$$

   (b) Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^\star$ et N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que si les sphères $S_{N_1}(0_{\mathbb{R}^2},1)$ et $S_{N_2}(0_{\mathbb{R}^2},\alpha)$ sont égales, alors il existe $k\in\mathbb{R}$, que l'on explicitera, tel que $N_1(u)=kN_2(u)$ pour tout $u\in\mathbb{R}^2$.

   (c) En justifiant à l'aide du dessin, en déduire qu'il existe $\beta\in\mathbb{R}$, que l'on explicitera, tel que $N(u)=\beta\left(|x|+|y|\right)$ pour tout $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
3. On cherche maintenant à retrouver le résultat précédent par le calcul.

   (a) Montrer que $N(x,y)=N(y,x)=N(-x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   (b) En déduire que $N(x,y)=N(|x|,|y|)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

   (c) Retrouver ainsi le résultat de la question 2c.

Exercice 12. Pour tout $f\in C([0;1],\mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t,\quad \|f\|_2=\sqrt{\int_0^1(f(t))^2\,\mathrm{d}t},\quad \text{et}\quad \|f\|_\infty=\sup_{t\in[0;1]}|f(t)|.$$

Montrer que pour tout $f\in C([0;1],\mathbb{R})$, on a $\|f\|_1\le\|f\|_2\le\|f\|_\infty$, mais que ces trois normes ne sont pas équivalentes.
Indication : on pourra considérer les fonctions $f_n:x\longmapsto x^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.