Feuille d'exercices n° 2

Sous-espace orthogonal et projections orthogonales

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = {}^t X \cdot A \cdot Y.$$

(on a identifié $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}$). Déterminer une base de l'orthogonal respectif des ensembles suivants :

$$F = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp.$$

Que peut-on dire de plus en dimension finie ?

Exercice 3. Soient E un espace préhilbertien (réel ou complexe) et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i). F et G sont orthogonaux,
   (ii). $F \subset G^\perp$,
   (iii). $G \subset F^\perp$.
2. Soient $F_1, \ldots, F_m$ des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Montrer qu'ils sont en somme directe.
3. Montrer que si $E = F \oplus G$ et F et G sont orthogonaux, alors $G = F^\perp$.
4. On suppose désormais que E est de dimension finie. Montrer que la concaténation d'une base orthonormée de F avec une base orthonormée de $F^\perp$ donne une base orthonormée de E.

Exercice 4. On se place dans $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ que l'on munit de son produit scalaire canonique. On note $F = \mathcal{C}^2([0;1];\mathbb{R})$.

1. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in F$ telle que $g'' = f$ et $g(0) = g(1) = 0$.
2. En déduire que $F^\perp = \{0_E\}$.
3. Le sous-espace vectoriel F admet-il un supplémentaire orthogonal ? Que peut-on en déduire sur sa dimension ?

Exercice 5. (Exemples d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

1. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
   (a) Trouver une base orthonormée du plan $\{(2,-3,6)\}^\perp$.
   (b) On pose $u_1 = (1,2,2), u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$. Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthonormée (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que e_1 soit colinéaire à u_1, et que le plan engendré par e_1 et e_2 soit égal à celui engendré par u_1, et u_2.
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ pour trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6. Soit $p : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On suppose que p est un projecteur, i.e. $p^2 = p$. Montrer que $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$, que $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$ et que p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.
2. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. On suppose que p est la projection sur F parallèlement à G. Montrer que p est un projecteur.
3. On suppose maintenant que E est un espace hermitien ou euclidien. Soit p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et s. si : $\forall (x,y) \in \operatorname{Im}(p) \times \operatorname{Ker}(p),\ \langle x, y \rangle = 0$.

Exercice 7. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, on considère $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur F ainsi que le symétrique orthogonal de J par rapport à F.
2. Calculer la distance de J à F.
3. En déduire $\inf\{2(1-a)^2 + 2(1+b^2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 8. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On se donne $v_1 = (1,0,2), v_2 = (2,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. On notera p_F la projection orthogonale sur F.

1. Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1,1,0)$.
3. Déterminer toutes les bases de $\mathbb{R}^3$ pour lesquelles la matrice de p_F est $\mathrm{Diag}(1,1,0)$.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$< a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On note H l'hyperplan suivant : $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 10. Dans $\mathbb{C}^6$, soit $H = \{(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{C}^6 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$ puis la distance entre $u = (i, -1, 0, -2, 4i, 0)$ et H.

Exercice 11. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\mathcal{C}$ on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a - b\sin(t) - c\cos(t))^2 dt$$
comme le carré de la distance de f à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.
2. En déduire l'expression de a, b et c en fonction de f pour lesquels l'inf précédent est atteint.
3. Application : Déterminer a, b, c pour $f : t \longmapsto t$.

Exercice 12. Soient E un espace euclidien et p un projecteur sur E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$p \text{ est un projecteur orthogonal} \iff \text{pour tout } x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 13. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $p : E \to E$ un projecteur. On suppose que p satisfait : $\forall x \in E,\ \langle p(x), x\rangle \geq 0$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 14. Soit E un espace euclidien. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux. Montrer l'équivalence entre :

1. $\mathrm{Im(p)} \subseteq \mathrm{Im(q)}$,
2. pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Pour s'entraîner :

Exercice 15. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui des matrices antisymétriques. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}n_{ij}$ où m_{ij} sont les coefficients de M et n_{ij} ceux de N.

1. Vérifier que pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tM \cdot N)$.
2. Soient $S \in \mathcal{S}$ et $A \in \mathcal{A}$. Remarquer que $\langle {}^tS, {}^tA\rangle = \langle S, A\rangle$.
   En déduire que $\langle S, A\rangle = 0$.
3. Déduire de la question précédente que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^\perp$ puis que $\mathcal{S} = \mathcal{A}^\perp$.
4. On sait alors que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.
   Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'unique $S \in \mathcal{S}$ et l'unique $A \in \mathcal{A}$ en fonction de M telles que $M = S + A$.
5. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la distance entre M et $\mathcal{S}$, la distance entre M et $\mathcal{A}$, puis la distance entre $p_{\mathcal{S}}(M)$ et $p_{\mathcal{A}}(M)$.

Exercice 16. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$< P, Q >= \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i).$$

1. Vérifier qu'avec cette application, E est muni d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormé de E.
3. Pour $Q \in E$, déterminer la distance de Q à $H = \left\{P \in E \mid \sum_{i=0}^{n} P(a_i) = 0\right\}$.