Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Maths III PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 2 : Permutations – Déterminants

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{S}_n$ désigne l'ensemble des bijections de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même, et que les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont appelés des permutations.

Exercice 1.

1. Dans $\mathfrak{S}_5$, soient les permutations $\sigma_1 = (12345)$, $\sigma_2 = (12)$ et $\sigma_3 = (135) \circ (24)$. Représenter chacune d'entre elles par un joli dessin avec une patate, cinq points et une flèche de chaque point vers son image, et réécrire chacune d'entre elles sous la forme $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}$.
2. Dans $\mathfrak{S}_9$, soient les permutations
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 9 & 3 & 7 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\text{et} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Les écrire comme produits de cycles à supports deux à deux disjoints.

Exercice 2. Décrire tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 3.

1. Dans $\mathfrak{S}_3$, soient $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\sigma \circ \pi$, puis σ^{-1} et préciser la signature de σ.
2. Soit $n \geq 3$. Dans $\mathfrak{S}_n$ soit $\pi = (123)$ et $\sigma = (13)$. Calculer $\sigma \circ \pi$ et $\pi \circ \sigma$.
3. Dans $\mathfrak{S}_4$ soit $\sigma = (12) \circ (34)$ et $\pi = (1342)$. Expliciter leurs inverses et préciser leurs signatures respectives. Écrire π comme un produit de transpositions.
4. Plus généralement soit un cycle $(i_1 \dots i_k)$ dans $\mathfrak{S}_n$. Préciser sa signature en fonction de n et k.

Exercice 4. Calculer les déterminants des matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 5 \\ -3 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ -3 & 5 & 8 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Calculer le déterminant de la matrice suivante avec la formule de développement :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.
Calculer AB puis $\det B$.

Exercice 7. Soient a, b, c et d quatre réels. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille (u,v,w) formée des vecteurs $u = (m,1,1)$, $v = (1,m,1)$ et $w = (1,1,m)$ où m est un paramètre réel. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que la famille (u,v,w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Justifier que la matrice suivante est inversible et calculer sa matrice inverse à l'aide de sa comatrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et $M = M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tMM$. En déduire la valeur absolue du déterminant de M.
2. Préciser la valeur de $\det[M(a,0,0,0)]$.
3. Dans cette question, on suppose $(b,c,d) \neq (0,0,0)$. Pour t réel, on pose $f(t) = \det[M(ta-t+1, tb, tc, td)]$. Montrer que la fonction f ne s'annule pas et, par ailleurs, que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur du déterminant de M.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a : $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i$.

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On note $A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $D_n = \det A_n$.

1. Calculer D_2 et D_3.
2. Calculer D_n en fonction de n (on pourra procéder de façon directe ou par récurrence).
3. Calculer le rang de la matrice A_n en fonction de a.

Exercice 13. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la matrice dite "tridiagonale", à coefficients réels, de taille n,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note D_n son déterminant.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).
3. La matrice A_n est-elle inversible ?

Exercice 14. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la matrice, à coefficients réels, de taille n,

$$A_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On note D_n son déterminant. En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer une expression explicite de D_n.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer l'égalité suivante (déterminant dit "de Vandermonde") :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Exercice 16. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, *i.e* ${}^tA = -A$.
Montrer que si A est inversible, alors n est nécessairement pair.

Exercice 18. Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est entier.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice à coefficients entiers. Montrer que si tous les coefficients de A sont impairs, alors $\det A$ est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 20. On note $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.

Pour aller plus loin :

Exercice 21. Soit $n \geq 2$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{Com}(M)$ la comatrice d'une matrice M.

1. Montrer que si A est de rang inférieur ou égal à $n-2$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est la matrice nulle.
2. Montrer que si A est de rang n, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang n.
3. Montrer que si A est de rang $n-1$, alors $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1.
4. On suppose dans cette question que $n = 2$. Que vaut ${}^t\mathrm{Com}({}^t\mathrm{Com}(A))$?
5. On suppose dans cette question que $n \geq 3$. Que vaut ${}^t\mathrm{Com}({}^t\mathrm{Com}(A))$? (On distinguera deux cas, selon que A est ou non inversible).